ANAMORFOSI CATOTTRICHE (SPECCHIO SFERICO).

Sviluppo dei calcoli.

Si osservi la Fig. 1.
La circonferenza di centro O è la traccia della sfera Σ (specchio sferico) sul piano del disegno;
TT è la traccia di σ (piano dell'immagine virtuale) sul piano del disegno;
TV' è la traccia di π (piano dell'immagine reale) sul piano del disegno
(i piani σ e π sono perpendicolari a quello del disegno);
Q è il punto oggetto;

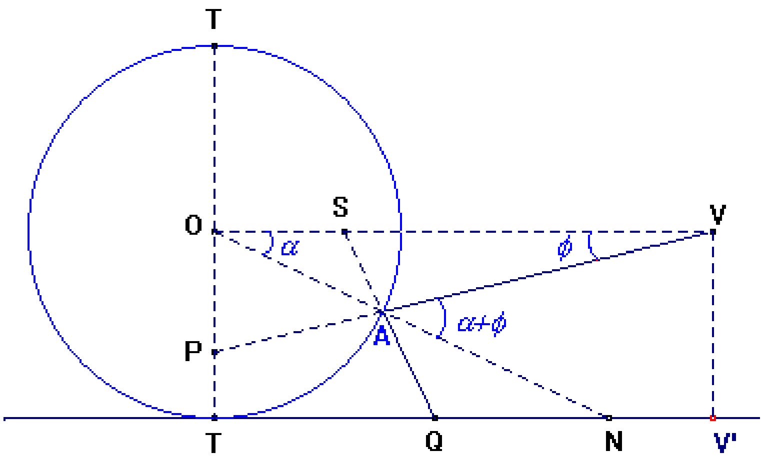

Fig 1

P è il punto immagine;
A è il punto di incidenza del raggio che proviene da Q;
OA = OT = r è il raggio della sfera;
OP = ρ è il raggio vettore di P nel sistema di coordinate polari (ρ; θ) avente O come polo e OT come asse;
OV (parallelo a π, normale a σ) = d è la distanza tra occhio V e centro della sfera O.

Si ha facilmente dalla figura, posto φ = angolo OVA: $\tan\phi = \frac{\rho}{d}$, quindi $\phi = \tan^{-1}(\frac{\rho}{d})$;
possiamo quindi ritenere noti i valori di $\cos\phi$, $\mathrm{sen}\,\phi$ allorché sia nota la posizione di P(ρ,θ).
Applicando il teorema dei seni al triangolo OAV si ricava:
$\mathrm{sen}(\alpha+\phi) = \frac{d\,\mathrm{sen}\,\phi}{r} = k$, perciò $\alpha+\phi = \mathrm{sen}^{-1} k$. Anche α è dunque noto se si conoscono le coordinate di P, e si può ritenere noto anche l'angolo γ = VSQ = SQT = = (per le leggi della riflessione e noti teoremi sui triangoli) = 2α + φ.

Al variare di ρ (quindi di P) il punto S cambia la sua posizione su VO: cambia anche l'angolo γ, e può essere $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, oppure $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$. Se ρ è costante (e θ varia), P descrive

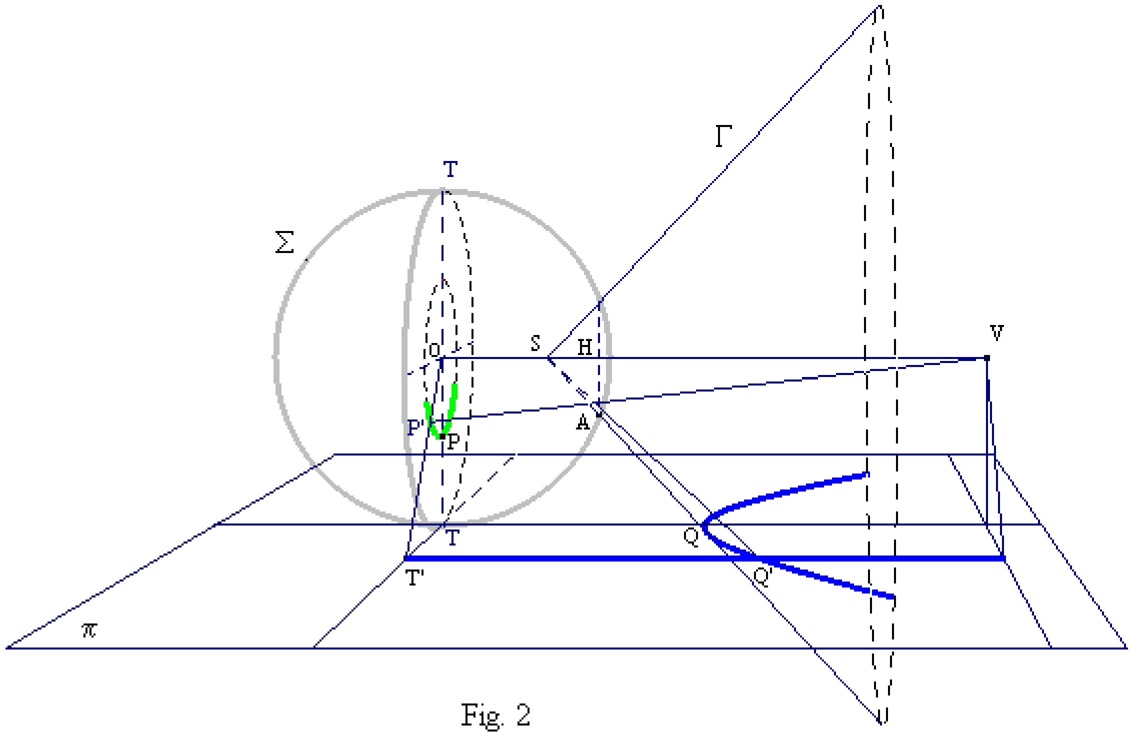

Fig. 2

una circonferenza di raggio ρ.
In quest'ultimo caso abbiamo che: (cfr. Fig.2)

- la semiretta VP descrive il cono (a una falda) di vertice V e angolo φ (asse VO);
- A descrive (sulla sfera Σ) una circonferenza di raggio HA;
- S rimane fisso nella sua posizione;
- la semiretta SQ descrive il cono Γ (a una falda) di vertice S e angolo $\gamma = 2\alpha + \varphi$; il cono sarà rivolto verso V oppure verso O, secondo il valore di γ;
- Q descrive su π un ramo di iperbole (J) intersezione del piano π e cono Γ;
- T descrive la retta TT' (intersezione del piano σ con π);
- Il piano VOT ruota attorno ad OV di un angolo θ uguale a quello descritto da OP: corrispondentemente, la retta TQ (t) (intersezione del piano VOT e del piano π) trasla su π; in figura, la retta T'Q' (t)' rappresenta una delle possibili posizioni assunte da TQ durante il suo movimento: quella corrispondente alla posizione P' di P);
- In ogni istante, il punto (oggetto) Q' si ottiene come intersezione tra (t)' (mobile) e l'iperbole J (fissa).

Ma se ρ è variabile, S (come abbiamo detto) si sposta su VO (è variabile infatti l'ampiezza dell'angolo φ) e il ramo di iperbole J cambia la sua forma (può rivolgere la concavità verso la sfera o dalla parte opposta); in ogni istante, il punto oggetto Q' si otterrà come intersezione tra la retta (t)’ – parallela a (t) – e la iperbole J (di forma variabile), in funzione delle coordinate di P’.

Determiniamo ora sul piano π, nel riferimento ortonormale avente origine in T, asse x (delle ascisse) coincidente con la retta TQ (t), asse y (delle ordinate) con la retta TT’, le equazioni della retta (t)’ e dell’iperbole J.

Equazione della retta T’Q’ (t)’: $y = r\tan\vartheta$ (immediata).

Equazione della iperbole J

Primo metodo (cfr. Fig. 3).
Il punto Q è vertice dell’iperbole; il punto C (proiezione ortogonale di S su π) è il centro della iperbole. Ricordiamo che l’angolo VSQ = SQC = γ = 2α + φ.
Quindi CQ = $r\cot\gamma$ è il semiasse reale dell’iperbole.
La sfera di Dandelin relativa al cono Γ e all’iperbole J ha raggio uguale a quello della sfera Σ: vediamo in Fig. 3 la sua traccia sul piano del disegno (circonferenza di centro O’). Il fuoco dell’iperbole J è dunque F, punto di tangenza tra π (piano dell’iperbole) e la sfera di Dandelin. QF è la distanza tra vertice e fuoco. Con semplici considerazioni geometriche (la sfera di Dandelin è tangente al cono Γ nei punti E ed E’) si ha : angolo QO’F = $\frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\phi}{2}$, QF = $r\tan\frac{\gamma}{2}$, CF = CQ + QF =

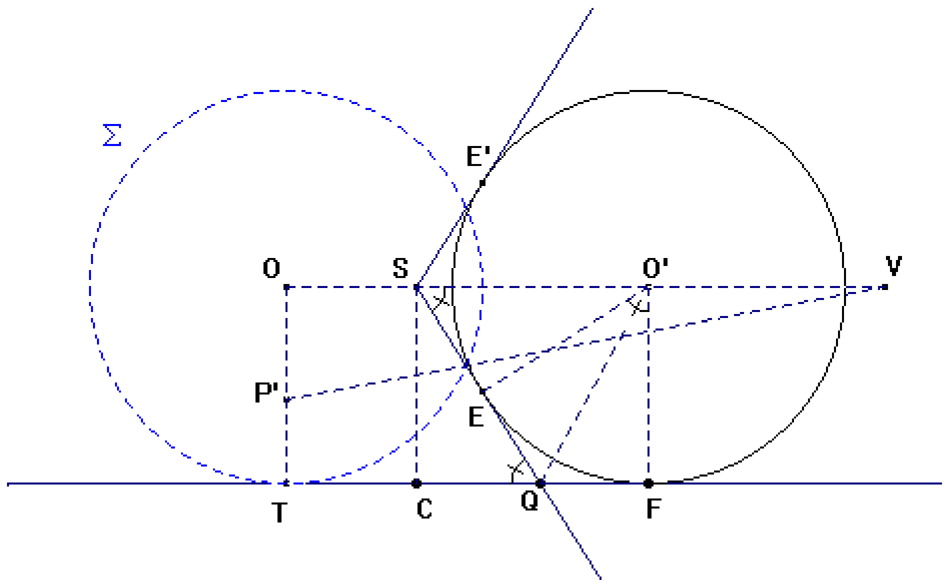

Fig.3

= $r(\cot\gamma + \tan\frac{\gamma}{2})$. Ponendo: semiasse reale = CQ = a; distanza focale = CF = c,

quindi $a = r\cot\gamma$, $b = r(\cot\gamma + \tan\frac{\gamma}{2})$, si ha subito la equazione normale

dell’iperbole J (il riferimento ha centro in C, asse delle ascisse coincidente con la retta TQ): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ (*).

Occorre ora traslare l'origine del riferimento in T. Evidentemente CT = OS. Ma applicando il teorema dei seni al triangolo OSA (cfr. Fig. 1) si ottiene:
$\dfrac{OS}{\text{sen}(\alpha+\phi)} = \dfrac{r}{\text{sen}(2\alpha+\phi)} = \dfrac{r}{\text{sen}\,\gamma}$ (infatti i seni di angoli supplementari sono uguali).

Dunque $OS = CT = x_c = r\dfrac{\text{sen}(\alpha+\phi)}{\text{sen}\,\gamma}$ valore calcolabile in base alle coordinate di P'.
Operando la traslazione, l'equazione (*) diventa:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Le coordinate di Q' saranno quindi fornite (in funzione delle coordinate di P') dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_c)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1 \\ y = r\tan\theta \end{cases} \quad (**).$$

Secondo metodo.
La equazione (*) si può ottenere in modo più semplice con le seguenti osservazioni. (Cfr. Fig. 4).

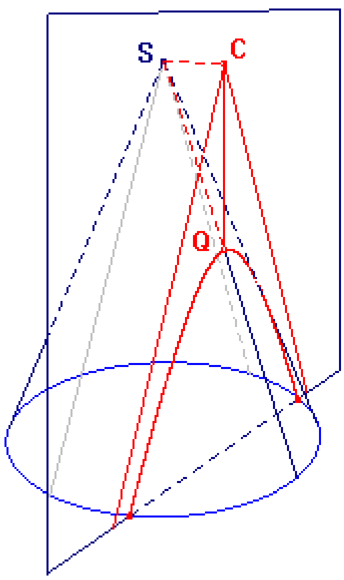

Fig. 4

Un cono di vertice S e angolo di apertura 2γ sia intersecato da un piano parallelo all'asse: l'iperbole sezione ha il centro in C (proiezione ortogonale di S sul piano); l'asse di simmetria (asse reale) è la parallela all'asse del cono condotta per C; il vertice Q è l'intersezione del cono con questa retta; gli asintoti sono le parallele, condotte per C, alle due generatrici del cono parallele al piano secante. Quindi l'angolo fra un asintoto e l'asse dell'iperbole è γ.
Segue con facili calcoli che, posto SC = r, si ha CQ (semiasse reale) = $r\cot\gamma$, mentre il semiasse immaginario è $CQ\tan\gamma = r$.
Nel nostro caso dunque (si confrontino le Figure 3 e 4) l'equazione della iperbole riferita ai propri assi è:

$\dfrac{x^2}{r^2\cot^2\gamma} - \dfrac{y^2}{r^2} = 1$, che coincide con la (*). Si verifica infatti facilmente, con qualche calcolo, che $c^2 - a^2 = r^2$.

Utilizzando una calcolatrice, si procede come segue: fissato sul piano σ un riferimento ortonormale di centro O e asse delle ascisse coincidente con OT, si scelgono le coordinate dei punti P'(x;y) dell'immagine virtuale; si trasformano in coordinate polari P'(ρ,θ) (polo in O, OT asse polare); si calcolano a, c, x_c; infine, con il sistema (**), si ricavano i punti oggetto Q'.