METODO DI DE LA HIRE. 1.

(Fonte: “*Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*”, Parigi 1673)

A) Philippe De la Hire (1640-1718) era figlio di un pittore, Laurent De La Hire, e praticò egli stesso la pittura prima di dedicarsi allo studio della matematica e dell’astronomia.
Il suo interesse per le proiezioni derivò certamente dalle sue esperienze artistiche giovanili, che lo portarono ad osservare e manipolare i prospettografi, ma soprattutto a subire il fascino della geometria visiva. Si impadronì quindi dei metodi di Pascal e Desargues (il principale trattato arguesiano, il “Brouillon Project”, ci è pervenuto attraverso una copia manoscritta eseguita dal De La Hire), e li applicò (insieme a quelli “analitici” di Descartes e Fermat) allo studio delle coniche. Fu astronomo (collaborò con Cassini a determinare la lunghezza del meridiano terrestre e partecipò alle discussioni sulla forma della terra), ingegnere idraulico, professore all’Académie Royale d’Architecture, esperto di meccanica teorica e pratica: ma pubblicò anche un trattato sull’ottica della visione e un altro (postumo) sui mezzi per disegnare e dipingere.(1) Potremmo per alcuni aspetti considerarlo uno degli ultimi rappresentanti della tradizione rinascimentale: tuttavia, nella seconda metà del Seicento, il processo di separazione tra arte e scienza era quasi completamente compiuto, e la divisione del lavoro ormai accentuata.

Fra i trattati sulle coniche scritti da De la Hire (2), il primo (*Nouvelle Méthode en géométrie* …, 1673) è quello in cui egli riprende le teorie di Désargues e Pascal, senza però abbandonare del tutto alcuni procedimenti tipici dei geometri greci. Nel capitolo intitolato “Les Planiconiques”, a pag. 75, presenta una costruzione grafica (eseguibile con riga e compasso) che serve per ottenere i punti di una qualsiasi conica, partendo da una circonferenza, **con operazioni totalmente interne al piano in cui giace la circonferenza.**
Perviene a tale costruzione in tre fasi:

- prima studia, nello spazio tridimensionale, le relazioni tra il vertice del cono che ha come base la circonferenza assegnata e i punti (allineati col vertice) di questa circonferenza e della curva ottenuta sezionando il cono con un piano generico;
- quindi, poiché la conica sezione si può considerare come prospettiva della circonferenza (per un osservatore che abbia l’occhio nel vertice del cono), con un movimento analogo a quello descritto da Stevin (che lascia invariata la prospettiva) sposta sia la base sia il vertice del cono fino a disporli sul piano secante;
- infine, siccome le relazioni ricavate nella prima fase sono invarianti durante il movimento realizzato nella seconda, esse valgono anche quando vertice del cono, conica sezione e circonferenza di base sono complanari: possono quindi essere

utilizzate per ricavare un punto della conica partendo da un punto della circonferenza.

B) Descriviamo e illustriamo in modo più diffuso questo procedimento. (Figura 1)

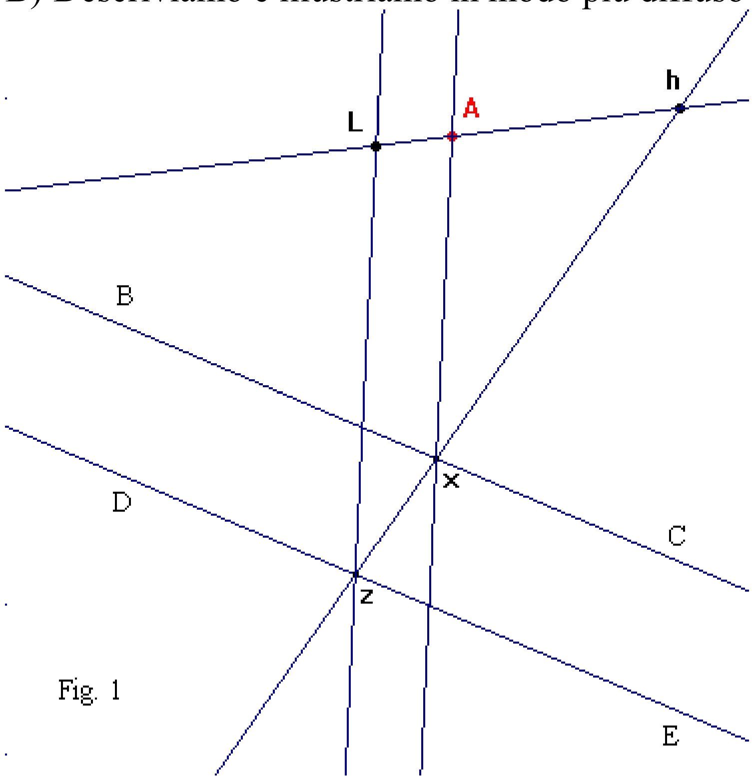

Fig. 1

Date sul medesimo piano (dice De La Hire) due rette parallele fra loro e un punto, l'una delle due rette (BC) sia chiamata **direttrice**, l'altra (DE) **formatrice**, e il punto (A) (<u>esterno alla direttrice</u>) **polo**. Si prenda un punto qualunque *h* su questo stesso piano. Per il polo A si tracci la retta A*h* e per il punto *h* una qualunque retta *hx* che incontri la direttrice BC in *x* e la formatrice DE in *z*; si congiunga poi A con *x* e si mandi da *z* la parallela ad A*x*: questa taglia A*h* in L. Diremo che il punto L è il **punto formato** a partire da *h*.
Si vede da questa generazione che i punti formati (L) stanno sempre sulle rette congiungenti il punto A con i punti (*h*) che li formano. Inoltre si vede che punti formati diversi non saranno sovrapposti se i punti che li formano sono separati, e che i punti della direttrice non potranno formare alcun punto.
De La Hire deduce quindi, attraverso quattro lemmi e alcuni corollari, le proprietà più notevoli di questa trasformazione, e la applica ai punti di una circonferenza: ottenendo una parabola se la direttrice è tangente alla circonferenza, una iperbole se la direttrice è invece secante, una ellisse nell'altro caso.
Per noi è evidente che si tratta della costruzione di una **omologia piana**
Rispetto alla nomenclatura attuale si hanno le seguenti corrispondenze terminologiche:

- Formatrice $\rightarrow$ Retta luogo di punti uniti o asse;
- Direttrice $\rightarrow$ Retta limite (sul piano di partenza);
- Polo $\rightarrow$ Centro di omologia;
- Punto formato $\rightarrow$ Punto trasformato.

Osserviamo però che l'**omologia** non appare affatto, nel testo di De La Hire, come trasformazione dell'intero piano in sé (questo concetto si costituirà solo nell'Ottocento); c'è soltanto una costruzione **particolare** che genera i punti di una figura **singola** (la conica) partendo da quelli di un'altra **singola** figura (la circonferenza).

In Figura 2 è rappresentato il modello fisico tridimensionale con cui ora spiegheremo (con libertà di linguaggio) la genesi del metodo di De La Hire.
Il modello illustra una prospettività fra i due piani π e π′; P è il centro della

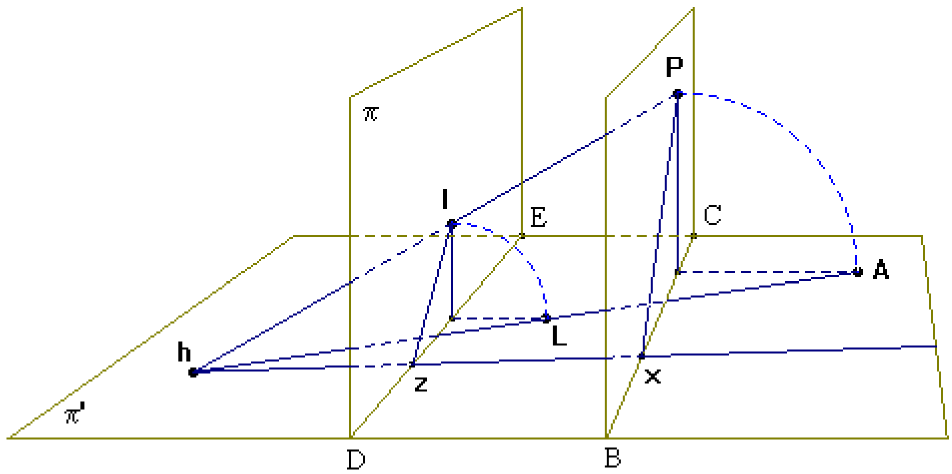

Fig. 2

prospettività (da cui escono i raggi); *l* ed *h* due punti corrispondenti (appartenenti quindi al medesimo raggio); DE la retta luogo di punti uniti (formatrice); BC la retta limite formata dai corrispondenti dei punti impropri del piano PBC (direttrice). Facendo uscire da *h* una retta qualsiasi *hx* (giacente nel piano π′) che incontri in *z* la (formatrice) DE, si dimostra facilmente che *lz* e P*x* sono rette parallele, e tali rimangono quando i piani PCB e π ruotano (intorno alle rette BC e DE rispettivamente) purché nel loro movimento si mantengano paralleli (teorema di Stevin). Se il moto prosegue fino a quando P si trova su π′ (nella posizione A) i piani π e π′ si sovrappongono, il punto *l* arriva anch'esso su π′ (nella posizione L): si genera così una corrispondenza fra piani sovrapposti (trasformazione) in cui L è il trasformato di *h* ed L*z*, A*x* sono ancora rette parallele. E' così giustificata la costruzione di De la Hire.
Se i punti *h* appartengono a una circonferenza, i punti L appartengono alla conica proveniente dalla proiezione (con centro P) di quella circonferenza sul piano π.

Il metodo di De la Hire è interessante da un punto di vista didattico anche perché, dopo aver acquisito sicurezza ed esperienza nel trasformare (con riga e compasso) i punti di un piano, è per gli studenti molto facile dedurre (utilizzando semplici nozioni di geometria analitica o – se si vuole – il teorema di Talete e la similitudine di opportuni triangoli) le equazioni della trasformazione.

Si osservi la Figura 3, in cui B(*a, b*) è il punto da trasformare, C il centro della omologia. Si scelga l'asse delle ascisse sulla retta luogo di punti uniti, l'asse delle ordinate (il sistema è ortonormale) passante per C: la retta limite avrà allora

equazione $y = l$, e il punto C avrà coordinate $(0,c)$. Consideriamo una generica retta OB, di equazione $bx - ay = 0$ e intersechiamola con $y = l$: si ricava il punto P($\frac{al}{b}, l$). Il coefficiente angolare della retta PC risulta: $m = -\frac{(c-l)b}{al}$;
intersechiamo ora la retta parallela a questa e passante per O con la retta BC. Si ricava il sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{(c-l)b}{al}x \\ y - b = \dfrac{(b-c)}{a}(x-a) \end{cases}$$

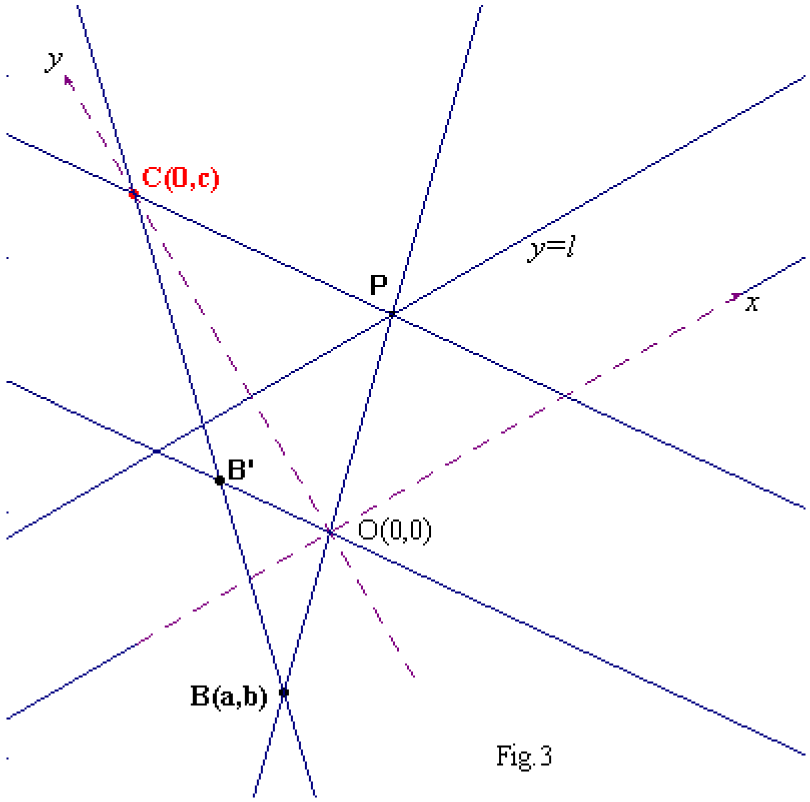

Fig. 3

dal quale, dopo alcuni passaggi ed eseguendo le sostituzioni

$a = x$; $b = y$; $x = x'$; $y = y'$; $c - l = h$

si ottiene infine:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{lx}{l-y} \\ y' = -\dfrac{hy}{l-y} \end{cases}$$

(equazioni canoniche della omologia).

B'(x', y') è il trasformato di B (x, y)
Per l'uso di queste equazioni, si noti che h rappresenta la distanza tra il centro di omologia e la retta limite, l la distanza tra le retta limite e l'asse della omologia.

---

(1) Ph. De La Hire, *Traité des differens accidens de la vue*, in Memoires de mathematique et de physique, Parigi 1694; *Traité del la pratique de la peinture*, in Memoires de l'Académie royale des Sciences, 1666 – 1699, Parigi 1780

(2) Sulle coniche, De la Hire scrisse tre trattati:

- *Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et Cylindriques* (dove riprende le ricerhe di Desargues e Pascal), 1673
- *Nouveaux elemens des sections coniques* (i metodi prevalenti sono quelli della geometria di Descartes e Fermat, la teoria è sviluppata interamente nel piano, le coniche sono definite attraverso le proprietà focali), 1679
- *Sectiones conicae* (in lingua latina; ritrova in modo sistematico e per via sintetica oltre 300 teoremi sulle coniche; molti enunciati sono stabilito per il cerchio e trasportati per proiezione alle altre coniche; notevoli i risultati sulle proprietà armoniche dei quadrilateri e sulla polarità rispetto a una circonferenza), 1685.