

PROIEZIONE DI CURVE.

introduzione

(Fonti: I. Newton “*Principi Matematici della Filosofia Naturale*”, ed. UTET 1965, Libro I, Sez. V, Lemma XXII; “*Enumeratio Linearum tertii ordinis*”, London 1704 – 1711; F. Jacquier, “*Elementi di Prospettiva secondo li principi di B. Taylor*”, Roma 1756, Appendice n. VI, “*Della proiezione delle curve*”, pag. 121).

1. “*Se in un piano infinito, illuminato da una sorgente luminosa, si proiettano ombre delle figure, le ombre di Sezioni Coniche saranno sempre Sezioni Coniche, quelle di curve di secondo genere saranno sempre curve di secondo genere, quelle di genere tre saranno sempre di genere tre, e così via all’infinito. Allo stesso modo in cui la Circonferenza, proiettando la sua ombra, genera tutte le Sezioni Coniche, così le cinque Parabole Divergenti generano con le loro ombre tutte le altre curve di genere due. Analogamente si potranno trovare, tra le curve di genere più elevato, alcune curve più semplici che formeranno con le loro ombre, proiettate sul piano da una sorgente luminosa, tutte le altre curve del medesimo genere*”.⁽¹⁾

(Newton, *Enumeratio Linearum tertii ordinis*, paragrafo IV).

Newton non fornì, nella *Enumeratio*, alcuna prova di questi suoi enunciati; ma, nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (lemma XXII) aveva già illustrato un metodo sintetico per costruire l’ombra (più precisamente: la proiezione da un centro proprio) di ogni curva piana, con semplici operazioni eseguibili con riga e compasso svolte nel piano della curva di partenza: dava anche “traduzione” analitica al suo metodo, utilizzandola però solo per dimostrare l’invarianza del grado nel passaggio dall’equazione della curva assegnata a quella della curva trasformata.

Qualche decennio dopo, Jacquier apre la Appendice VI dei suoi *Elementi di Prospettiva*, (versione commentata del trattato di B. Taylor) con queste parole:

“*La proiezione delle curve è una delle materie più importanti, e utili, della geometria. Il Newton nel lemma 22 delli principij ha accennato la dottrina delle proiezioni, ovvero delle trasmutazioni, colla sua solita brevità ed eleganza.*”

Quindi, riprendendo in esame (in modo più ampio e diffuso) il metodo newtoniano, dimostra esaurientemente tutte le affermazioni contenute nella *Enumeratio*.

La costruzione di Newton – Jacquier, come subito vedremo, è molto semplice: eseguita al computer con un software adatto (per esempio Cabri) può dare origine ad animazioni che mostrano con efficacia quali variazioni subisce

l'ombra di una curva piana proiettata, da una sorgente puntiforme mobile, su un piano incidente o perpendicolare a quello della curva.

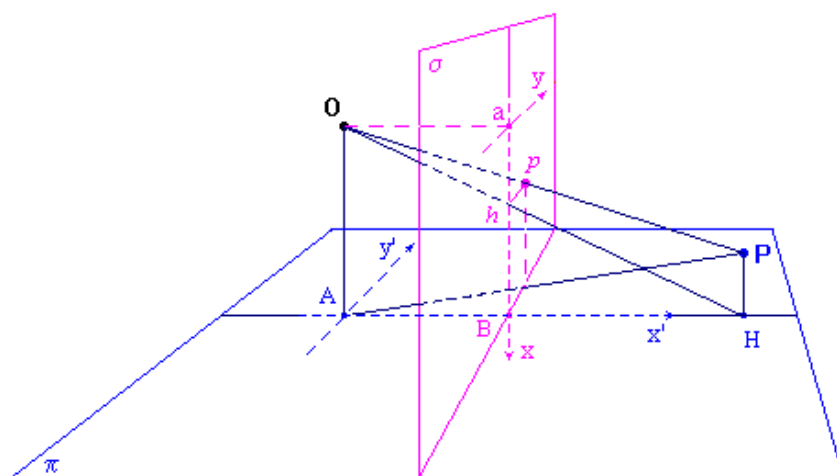


Fig. 1

- II. Esaminiamo la Figura 1. I piani prospettivi σ e π (nello spazio euclideo a tre dimensioni) sono perpendicolari; O è il centro di proiezione; il punto A è la proiezione ortogonale di O su π .

Sul piano π è collocato un riferimento cartesiano ortonormale $(x'; y')$, con origine in A, asse delle ascisse x' perpendicolare alla retta luogo di punti uniti, asse y' coincidente con la retta limite di π . Sul piano σ è collocato un secondo riferimento cartesiano $(x; y)$, anch'esso ortonormale, scelto in modo da avere come asse delle ordinate la retta limite di σ e come asse x la proiezione da O, su σ , dell'asse Ax' . Indichiamo con **a** l'origine del riferimento $(x; y)$; gli assi Ax' , **ax** si incontrano in B, sulla retta luogo di punti uniti.

Sia ora P un punto (appartenente a una curva assegnata) del piano π ; PH ne rappresenta l'ordinata. Il segmento **ph** (ordinata del punto **p** sul piano σ) è la prospettiva di PH. Detto altrimenti, PH è la proiezione di **ph**: i punti P e **p** si corrispondono nella prospettiva.

Ognuno dei due punti si può considerare come “ombra” dell'altro, se O è una sorgente luminosa puntiforme: la decisione dipende unicamente dalla posizione che P (quindi PH) occupa rispetto alla retta luogo di punti uniti.

Se **p** descrive una curva su σ , P descrive su π la curva corrispondente (e viceversa). Ognuna delle due curve può essere quindi considerata come “ombra” dell'altra.

Osserviamo esplicitamente che PH e **ph**, in quanto paralleli alla retta luogo di punti uniti, sono paralleli fra loro.

I piani π e σ si possono sovrapporre al piano OAB, che supponiamo parallelo a quello su cui stiamo scrivendo: si farà ruotare π attorno all'asse Ax' , σ attorno

I piani σ e π si potranno ancora sovrapporre al piano OA^*B facendoli ruotare rispettivamente attorno agli assi ax e A^*x' , ma le rotazioni non avranno più l'ampiezza di un angolo retto: uno dei possibili risultati è presentato in Figura 4

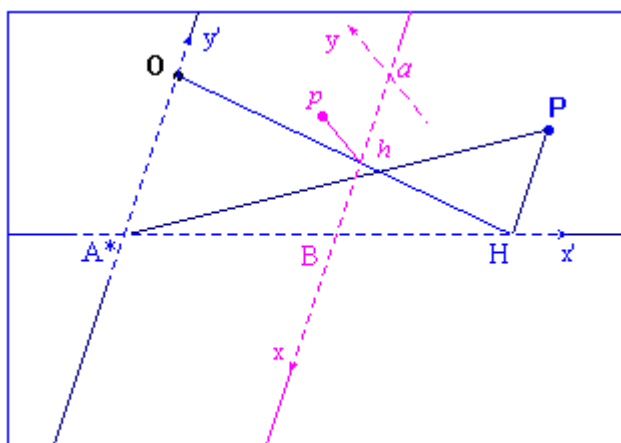


Fig. 4

(identica a quella scelta da Newton per illustrare il lemma XXII dei *Principi*), dove $y\hat{a}x$ (cioè l'angolo tra le direzioni delle ordinate corrispondenti PH e ph) e $O\hat{A}^*B$ sono angoli arbitrari. Valgono ancora, ovviamente, le proporzioni (*)

ricavate in II.

- IV. Usando le proporzioni $ph : PH = Oh : OH = AB : AH$ (*) e le coppie di triangoli simili (OAH, Oah) , (OPH, Oph) (**) (considerate in II.) è possibile, dato su π un qualsiasi punto P , costruire p (senza uscire da π) con riga e compasso. La [animazione 2](#) illustra la semplice costruzione

Facendo percorrere a P una curva (se si opera in Cabri – software da noi usato per le animazioni – dovrà essere definita come luogo), il punto corrispondente p ne descrive l'ombra (la proiezione).

Approfittando delle (*) e delle similitudini (**) mostriamo ora come si può trasformare per via analitica una equazione $F(x'; y') = 0$ che rappresenta una curva piana su π , nella equazione $f(x; y) = 0$ della curva corrispondente su σ . (I sistemi cartesiani di riferimento sono quelli delle Fig.1, 2, 3, 4).

Dalle proporzioni $ah : OA = Oh : OH$ e $Oh : OH = ph : PH$ si ricava infatti per confronto: $ah : OA = ph : PH$ (1).

Ma è anche valida – cfr. (*) – la proporzione: $Oh : OH = AB : AH$.

Confrontando quest'ultima con la prima delle precedenti si ottiene:

$ah : OA = AB : AH$ (2).

Poniamo: $PH = y'$; $AH = x'$; $ph = y$; $ah = x$; $OA = k$; $Oa = AB = d$.

Da (1) e (2) si deduce allora:

$$\begin{cases} x' = \frac{kd}{x} \\ y' = \frac{ky}{x} \end{cases} \quad (3)$$

Sostituendo i secondi membri delle (3) nella equazione $F(x'; y') = 0$, si ottiene l'equazione della curva corrispondente $f(x; y) = 0$.

Poiché la scelta dell'angolo fra gli assi è arbitraria su σ , la curva trasformata è definita a meno di una affinità. Tale scelta influisce infatti sul valore del parametro $k = OA$.

Per eseguire le animazioni che integrano l'osservazione dei modelli fisici abbiamo operato sia con assi ortogonali su entrambi i piani prospettivi (seguendo Jacquier: Figura 2), sia con assi obliqui (seguendo Newton: Figura 4).

⁽¹⁾ Si noti che il termine *genere* è qui ancora usato nell'accezione cartesiana. Oggi ha un significato del tutto diverso.