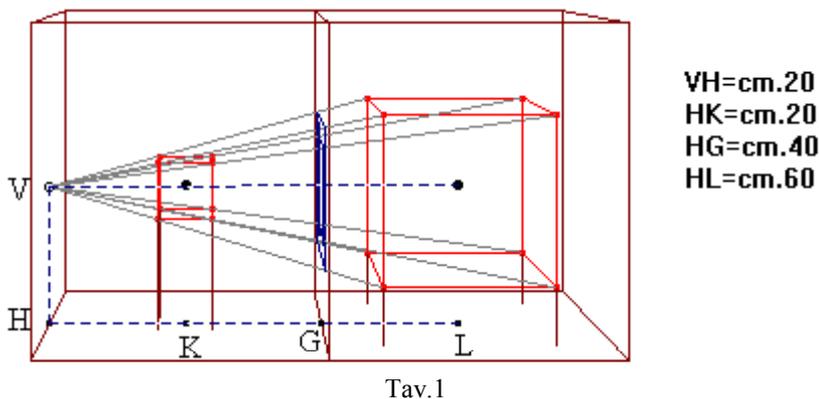


## SCHEDA DI APPROFONDIMENTO PER I MODELLI 1, 2, 3

I tralicci cubici corrispondenti  $C_1$  e  $C_2$  (nel seguito li chiameremo cubi; i vertici che si corrispondono sono allineati con un punto fisso  $V$ ) individuano, fra gli spazi proiettivi reali sovrapposti  $S_3$  ai quali rispettivamente appartengono, una omotetia avente rapporto 3 e centro  $V$ . (Si dice **omotetia** una omologia con piano di punti uniti improprio e centro proprio).

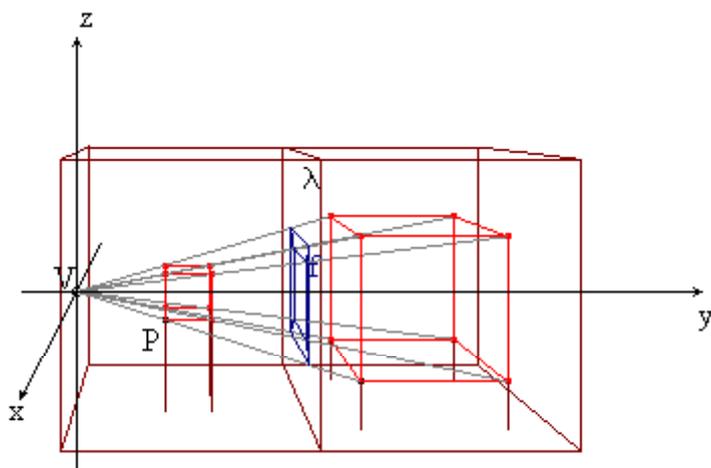
**1) Nella posizione iniziale**, i cubi sono situati da parti opposte rispetto a una lastra di vetro  $\lambda$  parallela a due facce corrispondenti; il raggio che congiunge a  $V$  i centri di queste facce è perpendicolare a  $\lambda$ . (Cfr. Tav. 1, in cui sono riportate le misure del modello)



Tav.1

Riferiamo entrambi gli spazi  $S_3$  a una terna di assi cartesiani ortogonali con origine in  $V$  (asse  $y$  perpendicolare a  $\lambda$ ) e scriviamo le equazioni dell'omotetia:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \\ z' = 3z \end{cases} \quad (*) \quad \text{oppure (nel verso opposto)} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \\ z' = \frac{1}{3}z \end{cases}$$



Tav.2

I raggi che da  $V$  vanno verso punti appartenenti ai cubi e omologhi secondo la (\*) intersecano il vetro  $\lambda$  e vi determinano una figura  $\mathcal{F}$  (cfr. Tav.2)

Vengono così a crearsi nuove corrispondenze:

- tra i punti di  $\mathcal{F}$  e le coppie dei punti soddisfacenti alla (\*) e appartenenti a cubi distinti;
- tra i punti di  $\mathcal{F}$  e i punti di *uno* dei due cubi.

Usiamo lo stesso riferimento in cui sono state scritte le (\*); indichiamo con  $P(x_p, y_p, z_p)$  un punto di  $C_1$  o

$C_2$ . Il raggio  $VP$  è intersezione del piano  $\alpha$ , individuato da  $P$  e dall'asse  $z$ , con il piano  $\beta$ , individuato da  $P$  e dall'asse  $x$ .

Equazione di  $\alpha$ :  $y_P x - x_P y = 0$ ;

Equazione di  $\beta$ :  $z_P y - y_P z = 0$ ;

Equazione del raggio  $VP$ : 
$$\begin{cases} y_P x - x_P y = 0 \\ z_P y - y_P z = 0 \end{cases};$$

Equazione del piano  $\lambda$ :  $y = d$  (essendo  $d$  la distanza di  $\lambda$  da  $V$ ).

Intersecando  $VP$  e  $\lambda$  ricaviamo le coordinate  $(x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$  del punto  $P'$  di  $\mathcal{F}$  corrispondente a  $P$  (punto di  $C_1$  o  $C_2$ ):

$$\begin{cases} x_{P'} = \frac{dx_P}{y_P} \\ y_{P'} = d \\ z_{P'} = \frac{dz_P}{y_P} \end{cases} \quad (**)$$

Consideriamo ora quei raggi che congiungono a  $V$  punti qualsiasi, ma omologhi nella omotetia (\*), degli spazi sovrapposti  $S_3$ ; anche tali raggi (eventualmente prolungati oltre  $V$ ) intersecano  $\lambda$ . Si hanno così corrispondenze più generali:

- tra i punti di  $\lambda$  e le coppie dei punti (appartenenti ad  $S_3$  distinti) che soddisfano alle (\*);
- tra i punti di  $\lambda$  e quelli di *uno* degli  $S_3$ ;

Mantenendo il riferimento cartesiano e il metodo utilizzati in precedenza si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{y} \\ y' = d \\ z' = \frac{dz}{y} \end{cases} \quad (***)$$

dove il punto  $(x, y, z)$  è scelto indifferentemente nell'uno o nell'altro degli  $S_3$  tenendo (se si vuole) conto delle (\*).

Si nota subito:

- anche immaginando che  $C_1$  o  $C_2$  abbiano come spigoli segmenti geometrici (invece di corpi fisici), la (\*\*) risulterà biunivoca solo per posizioni particolari dei *cubi* rispetto a  $V$  (ad esempio, la posizione iniziale considerata nelle Tav.1-2).
- nemmeno la (\*\*\*) è biunivoca: può diventarlo solo introducendo vincoli opportuni (ad esempio, l'appartenenza del punto  $(x, y, z)$  a un piano proprio di  $S_3$ ).

Infatti ogni punto di  $S_3$  ha un unico corrispondente in  $\lambda$  (intersezione con  $\lambda$  del raggio che lo congiunge a  $V$ ), ma non viceversa.

**2) Supponiamo** che il cubo più piccolo ( $C_1$ ) **subisca una traslazione**, per esempio parallela all'asse delle x. In questo caso, al variare del tempo  $t$ , fra le coordinate di un suo punto  $(x_p, y_p, z_p)$  solo la prima ( $x_p$ ) subirà variazioni: si abbia  $x_p \rightarrow x_p + f(t)$  (dove  $f(t)$  è una funzione continua del tempo). Anche il cubo più grande ( $C_2$ ) – in quanto corrispondente di ( $C_1$ ) nella omotetia (\*) – e la figura  $f$  subiranno necessariamente una traslazione parallela all'asse delle x. Le (\*\*) diventano:

$$\begin{cases} x_{p'} = \frac{d(x_p + f(t))}{y_p} \\ y_{p'} = d \\ z_{p'} = \frac{dz_p}{y_p} \end{cases}$$

Il risultato non cambia se a subire la traslazione (parallela all'asse x) è il centro di omotetia  $V$  oppure il cubo  $C_2$ .

In virtù delle corrispondenze studiate in 1):

- in ogni istante  $t$  la figura  $f$  è interpretabile sia come “**ombra**” del cubo  $C_1$  ( $V$  sarebbe in questo caso una luce puntiforme), sia come “**immagine prospettica**” del cubo omotetico  $C_2$  (e allora  $V$  sarebbe l'occhio dell'osservatore). (Cfr. Tav. 3 e modelli virtuali animati).

Tale conclusione può essere estesa a qualunque coppia di figure omotetiche negli spazi  $S_3$ , e a qualunque tipo di traslazione.

