

PROIEZIONE DI CURVE: CONICHE.

(Fonti: I. Newton “*Principi Matematici della Filosofia Naturale*”, ed. UTET 1965, Libro I, Sez. V, Lemma XXII; F. Jacquier, “*Elementi di Prospettiva secondo li principi di B. Taylor*”, Roma 1756, Appendice n. VI, “*Della proiezione delle curve*”; S. Stevin “*De Skiagraphia*”, Leyda 1605, traduzione italiana a cura di R. Sinisgalli, Roma 1978).

La semplicità delle equazioni

$$(\&) \begin{cases} x' = \frac{kd}{x} \\ y' = \frac{ky}{x} \end{cases} \quad (\text{Cfr. Scheda Introduttiva})$$

(dovuta alla particolare scelta dei sistemi di riferimento) le rende particolarmente adatte a dimostrare, con pochi passaggi, che la circonferenza può generare, per proiezione, ognuna delle tre coniche.

Sia (Figura 1: i riferimenti sono quelli della [Scheda Introduttiva](#)):

$$(x' - q)^2 + (y')^2 = r^2$$

l'equazione della circonferenza da proiettare, con centro in $(q; 0)$.

Applichiamo le (&) e otteniamo

$$\left(\frac{kd}{x} - q\right)^2 + \frac{k^2 y^2}{x^2} = r^2$$

Eseguiti i calcoli:

$$(q^2 - r^2)x^2 + k^2 y^2 - 2kdqx + k^2 d^2 = 0.$$

Se

$q > r$ si ha una ellisse (coefficienti di x^2 e y^2 concordi);

$q = r$ si ha una parabola;

$q < r$ si ha una iperbole (coefficienti di x^2 e y^2 discordi).

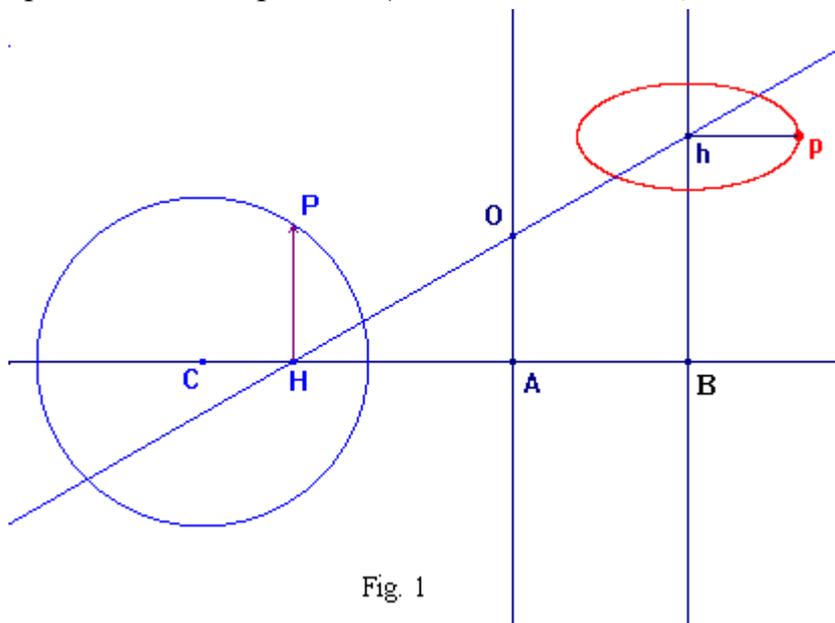


Fig. 1

Cambiare il valore di k significa eseguire una affinità: dunque la “natura” della conica trasformata non dipende da k .

In Figura 1 si vede la circonferenza assieme a una delle sue trasformate (ottenuta col metodo di Jacquier-Newton) che è una ellisse perché la

circonferenza non interseca la retta limite OA (perciò $q > r$).

Nella [animazione 1](#) (assi ortogonali) e nella [animazione 2](#) (assi obliqui) il centro della circonferenza si può spostare: la curva trasformata si deforma e diventa prima una parabola, poi una iperbole.

La [animazione 3](#) mostra invece i piani prospettivi (con la circonferenza su uno di essi e la relativa “ombra” conica sull’altro). E’ possibile variare: il punto di vista dell’osservatore, la distanza fra centro di proiezione e quadro, la distanza fra centro di proiezione e piano di terra.

I tre modelli fisici a fili tesi (come al solito, i fili materializzano i raggi luminosi o i raggi visuali) spiegano anche quale deve essere il moto simultaneo della sorgente luminosa e del piano che sorregge la circonferenza affinché l’ombra (prodotta sul piano di terra) rimanga invariata (teorema di Stevin).

