SCUOLA MATERNA
per l'educazione dell'infanzia

inserto

Numeri Una ricca raccolta di percorsi didattici sui numeri

a cura di Maria G. Bartolini Bussi e Mara Boni

Quanti anni hai? Quante candeline sulla torta? Quanti siamo oggi a scuola? Impariamo una bella filastrocca? Giochiamo al Gioco dell'Oca? Come è fatto questo pallottoliere? Diamo una mano al Lupo Sciocco? Giochiamo con i birilli?
Il lessico familiare, i riti di ogni giorno, il corpo, gli oggetti, i giochi e le storie per muovere i primi passi nel Regno dei Numeri.

Sommario

Le mani per contare
Le mani: un esperimento di ricerca-azione con bambini di tre anni
Il pallottoliere
Il pallottoliere: un progetto di ricerca-azione nelle scuole dell'infanzia del Comune di Modena
La scrittura dei numeri
Il complesso ruolo dell'insegnante

11

n. 11 - 1 febbraio 2011 - anno XCVIII - EDITRICE LA SCUOLA

In queste pagine proponiamo alcune attività sui numeri messe a punto nelle scuole comunali dell'infanzia di Modena e in altre scuole di province limitrofe, a cura di insegnanti in servizio e di studenti, tirocinanti, laureandi del Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria di Reggio Emilia.
La presentazione delle attività è preceduta da una breve introduzione sul tema, per fornire alle insegnanti alcuni riferimenti culturali essenziali per la programmazione didattica. Alcune schede fuori testo ampliano ed approfondiscono la presentazione.
Questa raccolta costituisce una evoluzione ed un aggiornamento delle attività proposte nel volume *Matematica: I numeri e lo spazio*[1].
Dal volume citato riprendiamo una ipotesi di indicazioni, che scandiscono in maniera operativa le attività realizzabili nella scuola dell'infanzia. L'ipotesi è stata costruita in analogia con il testo de "I discorsi e le parole" delle *Indicazioni* Fioroni[2].
Si rinvia al testo citato per una scansione più dettagliata degli obiettivi (v. Tav. 1).

Tav. 1 • **I numeri e lo spazio**

Ordinare, contare, misurare, rappresentare

I bambini apprendono a utilizzare, per rappresentare la realtà, i sistemi di segni (gesti, disegni, linguaggio orale e scritto, simboli numerici, schemi e mappe spaziali, ecc.) che le culture hanno elaborato e usano.
I bambini giungono alla scuola dell'infanzia avendo acquisito la capacità di esprimere le prime intuizioni numeriche, come valutazioni della quantità nel contare gli oggetti, nel confrontare le quantità e le grandezze direttamente. Hanno appreso, nell'interazione con i familiari, alcuni modi di esprimere collocazioni spaziali e di riconoscere alcune proprietà comuni degli oggetti. Hanno avuto contatti con messaggi contenenti notazioni numeriche. Spesso hanno già incontrato i sistemi di segni prodotti da culture diverse.
Nel corso della scuola dell'infanzia, si avvia la costruzione di alcuni significati (numero, misura, ordinamento; forma, mappa, punto di vista, ecc.) e processi matematici (contare, ordinare, classificare, spiegare, argomentare, progettare, inventare, rappresentare, formulare previsioni, ecc.), visti nel loro duplice aspetto di strumenti d'uso nella soluzione di semplici problemi e di oggetti su cui riflettere.
Se opportunamente guidati i bambini estendono le competenze relative ai processi matematici, giungendo a padroneggiare la sequenza dei primi numeri naturali, sia da un punto di vista intransitivo (la recita della filastrocca dei numeri) che transitivo (la corretta esecuzione della procedura del contare oggetti); formulano ipotesi sugli usi dei numeri e si cimentano con l'esplorazione dei numerali scritti presenti nell'ambiente; estendono il patrimonio lessicale ad alcuni termini legati all'esplorazione dello spazio (forme, sistemi di riferimento, mappe e percorsi); riconoscono schemi in sequenze di ambito numerico o spaziale.
La scuola dell'infanzia ha il compito di promuovere in tutti i bambini una prima alfabetizzazione relativa ai numeri e allo spazio. Offre la possibilità di esplorare e rappresentare attraverso questi linguaggi le attività della vita quotidiana, i giochi tradizionali da tavolo o di movimento, anche ripresi da altre culture; i diversi spazi (dal piccolo spazio delle costruzioni ad altri spazi più vasti in cui muoversi); i dati e i fenomeni della natura; le attività di conoscenza di sé, collegate alla storia personale.
La scuola incoraggia il progressivo avvicinarsi dei bambini alle notazioni scritte, presenti nelle diverse culture per rappresentare quantità, ordinamenti, misure, collocazioni spaziali, attraverso l'analisi dei messaggi presenti nell'ambiente e la produzione di nuovi messaggi.

Traguardi per lo sviluppo della competenza

Il bambino sviluppa la conoscenza di alcuni sistemi di segni relativi ai numeri e allo spazio e sa applicarla, con interesse, alla soluzione di semplici problemi, anche provenienti dagli ambiti scientifico e tecnologico.
Sa contare piccole collezioni di oggetti; sa raggruppare e ordinare, secondo criteri diversi; sa misurare alcune grandezze anche ricorrendo a semplici strumenti della vita quotidiana; sa utilizzare (leggere e produrre) le notazioni numeriche più semplici; sa operare riflessioni e spiegazioni sull'uso dei numeri.
Inoltre, sa esplorare lo spazio raggiungibile con le mani o con il movimento, lo spazio del foglio e qualche altro spazio rappresentativo (es. lo schermo del computer); sa usare espressioni che indicano relazioni spaziali (sopra – sotto; davanti – dietro; ecc.) in riferimento a se stesso, ad altre persone o ad oggetti; acquisisce consapevolezza dell'esistenza di diversi punti di vista; sa eseguire correttamente un percorso sulla base di indicazioni verbali; sa descrivere, utilizzando un linguaggio opportuno, ambienti, percorsi e giochi di movimento; sa riconoscere e rappresentare le forme degli oggetti collegandole alla loro funzione; sa spiegare i significati di alcune parole chiave (progetto, punto di vista, mappa, ecc.).

[1] Cfr. M.G. Bartolini Bussi, *Matematica: I numeri e lo spazio*, Edizioni Junior, Bergamo 2008. A tale volume si farà spesso riferimento per approfondimenti ed attività complementari.
[2] *Ibidem*, p. 27.

Il testo della Tav. 1 raccoglie in maniera organica diverse indicazioni presenti all'interno del campo "La conoscenza del mondo" e ne aggiunge altre tratte dalle buone pratiche sperimentate in scuole italiane e di altri paesi, tutte comunque accessibili ai bambini di 3-6 anni e ritenute fondamentali per la costruzione iniziale di una cittadinanza competente. Naturalmente, senza adeguate esemplificazioni, il testo rischia di restare generico e di lasciare le insegnanti nel dubbio su quali percorsi attivare. Lo scopo di questa raccolta è appunto quello di fornire esempi adeguati e documentati.
Il primo messaggio, importante, è che si può parlare di numeri con i bambini, già a tre anni. Ci vengono in aiuto le ricerche degli psicologi dell'età evolutiva, che con opportune e sofisticate metodologie hanno rilevato che ben presto i bambini si accorgono dei cambiamenti di quantità e quindi si preparano ad utilizzare i numerali con competenza (v. Tav. 2).
La raccolta delle attività è stata organizzata intorno a due temi:
• le mani;
• il pallottoliere gigante.
Ogni tema è introdotto da una sintesi che descrive la genesi dell'artefatto, la relazione con la storia dei numeri[4] e con la tradizione educativa[5].

Tav. 2 • **Karen Wynn: le prime abilità**

Alcune ricerche, su neonati o bambini piccolissimi in fase preverbale, dimostrano come l'abilità di nutrire semplici aspettative aritmetiche sia innata.
Gli esperimenti di Karen Wynn (1995), in particolare, mostrano che già intorno ai quattro o cinque mesi il bambino è in grado di individuare un cambiamento di numerosità in un piccolo gruppo di pupazzi (fino a tre). Quando il ricercatore copre il dispositivo con i pupazzi e, di nascosto, ne toglie o ne aggiunge uno, il bambino, di fronte alla modifica imprevista, presta un'attenzione prolungata. Lo scenario è diverso da quello atteso. Diversamente, se la numerosità dei pupazzi, dopo l'intervento dell'adulto, corrisponde alle sue aspettative, il bambino non mostra alcun interesse, sbadiglia e si distrae molto presto[3].
Nel corso dei primi anni poi, l'interazione con l'ambiente consente di perfezionare gli apprendimenti e porta a continue scoperte. I numeri e la loro rappresentazione fanno parte del vissuto del bambino che impara presto a memorizzare l'incipit della filastrocca dei numeri: uno due, tre.

[3] Per una descrizione accurata degli esperimenti, cfr. S. Dehaene, *Il pallino della matematica*, Mondadori, Milano 2000.
[4] Senza appesantire la lettura con citazioni continue, si intende che i principali riferimenti per la storia dei numeri sono: D. Guedj, *L'impero dei numeri*, Electa-Gallimard, 1997; G. Ifrah, *Enciclopedia universale dei numeri*, Mondadori, Milano 2008.
[5] M.G. Bartolini Bussi, *I numeri e lo spazio*, Edizioni Junior, Bergamo 2008, cit.

Le mani per contare

Le mani come artefatto?

Il termine "artefatto" non è di uso comune tra gli insegnanti. In prima lettura, un artefatto è una parte dell'ambiente materiale deliberatamente modificata dall'uomo per essere utilizzata con un'intenzione precisa. Si rinvia alla Tav. 3 per un approfondimento.

Le mani che toccano, afferrano, manipolano, accarezzano, indicano, sono cognitivamente molto diverse dalle mani che contano. Nel secondo caso c'è, infatti, l'intenzionalità di utilizzarle per uno scopo che non era quello originario e naturale. I primati non umani usano le mani e le dita anche in modi estremamente raffinati, ad esempio per estrarre il cibo da un contenitore o battere una pietra per rompere noci di cocco. Non c'è invece nessuna osservazione che documenti, nei primati non umani, l'uso delle mani e delle dita per contare (ad eccezione, forse, del caso di quelli addestrati al linguaggio dei segni). Dunque, l'utilizzo delle mani per contare richiede il distanziamento dalla mano come parte del proprio corpo e il controllo cosciente dell'azione che si compie. La mano diviene quindi un artefatto, una parte del mondo materiale deliberatamente trasformata per compiere un'azione diversa da quelle naturali. Analogamente, anche l'utilizzo delle mani per lasciare un'impronta trasforma la mano in un artefatto.

Tav. 3 • **Artefatti e schemi d'uso**

Nell'antropologia, un artefatto è un prodotto materiale realizzato dall'uomo (a volte detto anche manufatto, quando è realizzato con le mani) che contiene un sapere, può essere utilizzato per una pratica socialmente riconosciuta, rappresenta un'interfaccia col mondo per i suoi fruitori e presuppone – favorisce processi cognitivi complessi (astrazione, rappresentazione). Un artefatto è un oggetto la cui forma è giustificata dalla prestazione a cui era destinato, ancora prima della sua effettiva realizzazione. Cioè materializza l'intenzione preesistente da cui ha tratto origine. Gli artefatti presuppongono un progetto, uno scopo e di conseguenza un'intelligenza capace di attività creativa.

La nozione di artefatto è centrale anche nell'ergonomia cognitiva, disciplina che studia il rapporto uomo-macchina ovvero, più di recente, il rapporto tra l'uomo e i sistemi di elaborazione delle informazioni. Punto di partenza è l'osservazione che ogni utilizzo di un artefatto (una macchina, un attrezzo, un computer) ha, accanto ad un effetto sul mondo esterno, anche un effetto sui processi cognitivi dell'utilizzatore. Un testo di facile lettura sul tema è il classico "Le cose che ci fanno intelligenti" di Donald Norman[6]. Nelle applicazioni didattiche si utilizza molto spesso l'approccio strumentale di Pierre Rabardel[7]. Rabardel distingue un artefatto (inteso nel senso precedente) da uno strumento, inteso come entità mista composta sia da componenti legate alle caratteristiche dell'artefatto che da componenti soggettive (schemi d'uso messi in campo da un soggetto quando è assegnato un compito da risolvere con l'aiuto di un artefatto). Gli schemi d'uso dipendono dall'artefatto, variano a seconda del compito e, per lo stesso compito, variano da individuo a individuo. Nel seguito, saranno illustrati esempi di schemi d'uso collegati ad artefatti con compiti particolari.

Antiche impronte di mani nella "Cueva de las Manos" (Caverna delle mani), Santa Cruz, Argentina, (11000-7000 a.C.)

Il numero e la mano

Una caverna. Sulla parete una pittura rupestre racconta le imprese di un cacciatore. Un bisonte ferito e vicino, incisi nella pietra, quattro segni pressoché identici. L'artista primitivo ha compreso che è più "economico" dipingere un solo bisonte accompagnato da quattro segni, piuttosto che disegnare quattro bisonti.

L'idea di numero, il passaggio da quattro bisonti a quattro, dal numero dei bisonti al numero puro e semplice, è il punto di arrivo di un processo di astrazione durato millenni. La conquista del numero "puro" si è conclusa quando ogni cosa è stata considerata come una unità e null'altro, trascurando le differenze particolari percepite dai sensi (v. Tav. 4).

Finché il numero due rimase legato agli occhi di un bambino e il numero quattro alle zampe di un'antilope, i vari numeri non furono legati tra di loro: perché confrontare gli occhi di un bambino con le zampe dell'antilope? Perché ordinare numeri senza legami?

Dall'idea di numero puro scaturisce quella di successione naturale: i numeri si susseguono in fila indiana, ce n'è uno dopo l'altro, il successivo di un numero si trova aggiungendo 1... Nella successione naturale dei numeri convivono due aspetti: la funzione ordinale (primo, secondo, terzo...) e la funzione cardinale legata alla numerosità (uno due tre...).

Quando si vuole ordinare una serie di oggetti si sovrappone su di essa la sequenza modello dei numeri: primo, secondo, ecc.

Tav. 4 • **Numeri e concreto**

In alcune lingue, i numerali sono diversi a seconda degli oggetti contati. Ad esempio, nella lingua Kusaiean, parlata nell'isola Kosrae delle Caroline, ci sono due diverse categorie di numerali: una prima categoria si usa per contare pesci, insetti, animali a quattro gambe, piante, mezzi di trasporto, oggetti lunghi e appuntiti; una seconda categoria si usa per contare ogni altra cosa.

	Prima categoria	Seconda categoria
Uno	Soko	Sie
Due	Lukoac	Luo
Tre	Tolko	Tolu
Quattro	Yoko	Ahkorr

Lo stesso sostantivo può essere usato con numerali di entrambe le categorie, ma con un cambiamento di significato: ad esempio "paip yoko" significa quattro sigarette, mentre "paip ahkorr" significa quattro pacchetti di sigarette.

Un fenomeno per certi versi simile si ha nell'uso dei classificatori (o unità di conteggio o parole misura) della lingua cinese. In tale lingua tutte le volte che un sostantivo è preceduto da un numero, deve essere inserito tra i due un classificatore. Anche se esiste un classificatore "generico" (gè) che può essere usato in molte situazioni, di norma, i classificatori sono diversi per classi di sostantivi diverse. Così, ad esempio, si usano classificatori diversi nei casi: oggetti di carta composti da varie pagine, oggetti dotati di impugnatura, oggetti lunghi e sottili, indumenti, oggetti di forma granulare, veicoli, quadrupedi di grossa taglia, animali che vanno a coppie, ecc.

Questi aspetti linguistici si collegano probabilmente ad usi molto antichi dei numeri, sempre pertinenti a situazioni concrete. Nella nostra lingua sono rimaste tracce isolate di questi archetipi in alcuni casi: un paio di scarpe, una coppia di anitre, un quartetto d'archi, una dozzina di uova, un ambo, un terno, ecc.

L'uso del numero in situazioni concrete è cognitivamente meno complesso. Chiudiamo questa scheda con una citazione da un romanzo:

"*Due più due?*", mi chiese.
"*Non so*" dissi. "*Due più due cosa?*".
"*Mucche*" mi fece.
"*Quattro*" le risposi.
"*È troppo facile*", si lamentò un bambino dietro di me.
Io mi voltai a guardarlo e lui si fece piccolo piccolo.
"*Ventisette più ventisette*", fece lei.
"*Cosa?*".
"*Bottiglie*".
"*Con dentro cosa?*".
"*Birra scura*".
"*Cinquantaquattro*".
"*Non sarai mica un genio?*", mi chiese.
"*Che cos'è un genio?*".
"*Un ragazzo con un gran cervello*", disse lei.
"*Molto probabile*", risposi[8].

[6] D.A. Norman, *Le cose che ci fanno intelligenti*, Feltrinelli, Milano 1995.
[7] Citato, ad es., da M.G. Bartolini Bussi, M. Maschietto, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Springer, Milano 2006, p. 66 e ss.
[8] R. Doyle, *Una stella di nome Henry*, Ugo Guanda, Parma 2000, p. 100.

Il conteggio con le dita suggerisce l'idea di successione. La morfologia della mano implica un ordine: il primo dito è il pollice, il più vicino al polso e opponibile. Poi vengono le altre dita, simili, ma diverse per lunghezza, posizione e nome. Nel contare con le dita, ad alta voce o mentalmente, cominciamo ad associare il numero *uno* al *primo* dito, il numero *due* al *secondo*, il *tre* al *terzo*, il *quattro* al quarto e così via. I concetti di ordinalità (quarto) e di cardinalità (quattro) scorrono sulle dita della mano insieme, inseparabili. Le mani sono, a tutti gli effetti, un vero e proprio artefatto.

	1	2	3	4	...
principio cardinale					...
principio ordinale					...

Un patrimonio universale

La mano dell'uomo è il più antico e il più diffuso strumento di conteggio e di calcolo. La tecnica digitale è stata impiegata, fin dalla preistoria, da tutte le popolazioni e lo è tuttora. Nel mondo esistono molteplici varianti, fortemente radicate nella cultura e nell'esperienza delle persone. Le due immagini che seguono mostrano tecniche digitali diffuse in Italia e tecniche diffuse nel Nord Africa.

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5

A scuola, il ricorso alle tecniche di conteggio digitale dei diversi paesi di provenienza, può consentire un approccio interculturale originale. In tutti i paesi del mondo i numeri e l'aritmetica sono parte della prima alfabetizzazione dei bambini, anche nelle scuole poverissime. L'immediatezza del codice gestuale facilita la comprensione e la comunicazione. È una scelta che può favorire l'interazione con le famiglie che, in tutti i paesi del mondo, sollecitano molto presto il conteggio con le dita e l'uso dei numeri.

Dita-cervello: un dialogo insostituibile

Gli adulti ricorrono alla tecnica digitale molto più spesso di quanto si pensi ed è grazie ad essa che molti bambini cominciano a contare.

Le Dita, per disposizione della natura e per l'irrevocabile decisione del grande Aritmetico, sono state incaricate di servire al conteggio, alla stregua di rapide e naturali cifre, sempre pronte e sotto Mano ad assisterci nei nostri calcoli (J. Buwler, Chirologia, 1644)[9].

Questa breve epigrafe apre il quinto capitolo del libro "Intelligenza matematica" di Brian Butterworth, uno dei più famosi neuropsicologi cognitivi del mondo. Il capitolo, dedicato a "Mano, spazio, cervello", sottolinea l'importanza del conteggio sulle dita anche per sviluppare alcune aree cerebrali. Non è forse un caso che la rete corticale attivata quando si stanno elaborando numeri sia parzialmente sovrapposta con quella utilizzata per il movimento delle mani e delle dita.

Le manine e i numeri

Illustrazioni di Elisa De Benedetti

L'esplorazione della mano

Molto spesso, per avviare i piccolissimi alle prime forme di conteggio, gli adulti sollecitano l'uso delle dita della mano. Non sempre viene dedicata la stessa attenzione alle caratteristiche delle manine. A scuola come a casa, per prendere confidenza con le mani, si può contare sul contributo insostituibile delle filastrocche. Molte di esse sono state create dagli adulti proprio per accompagnare i piccolissimi nell'esplorazione del corpo. Nelle filastrocche, le mani, le loro funzioni, i nomi delle dita, si inseriscono in una narrazione che prevede l'interazione tra l'adulto e il bambino o tra i bambini stessi. Il copione è particolarmente coinvolgente perché le parole scorrono insieme a gesti e movimenti particolari. La produzione di filastrocche, tradizionali o d'autore, è molto vasta. Ne citiamo alcune, notissime, prese dalla tradizione popolare.

La manina matta
(l'adulto fa oscillare la mano continuamente)
picchia, ma è distratta,
ha trovato il suo padrone
e gli ha dato uno schiaffone
(l'adulto porta la manina al viso
del bimbo, fingendo di schiaffeggiarlo)

Pollice è caduto nel pozzo,
(l'adulto tocca le ditina in sequenza)
indice l'ha tirato su,
medio l'ha asciugato,
anulare ha fatto la zuppa
e mignolo l'ha mangiata tutta.

Mano piazza mano piazza
(l'adulto liscia il dorso della manina)
ci passa una lepre pazza
(fa il solletico sul palmo)
il primo dito la vede
(afferra il pollice)
il secondo la prende
(afferra l'indice)
il terzo la cucina
(afferra il medio)
il quarto la mangia
(afferra l'anulare)
mignolino, il più piccino,
lecca lecca nel piattino
(afferra il mingolo e lo struscia sul palmo)

La collaborazione con le famiglie può facilitare la ricerca di nuovi testi, può offrire occasioni di confronto e di scambio all'interno di un orizzonte multiculturale.

elligenza matematica,
o e simbolo nello svi-
esso cognitivo, Borin-

Le mani: un esperimento di ricerca-azione con bambini di tre anni

L'esperimento

L'esperimento di ricerca-azione che illustriamo è stato elaborato all'interno del Corso di formazione "Spazio, ordine e misura", condotto dalla prima autrice, rivolto alle Scuole dell'infanzia del Comune di Modena e sperimentato nelle sezioni dei tre anni a partire dall'anno scolastico 2008-2009. Nasce dal bisogno di far emergere in partenza, al di là del dato quantitativo, le forme e le modalità di rappresentazione del sapere matematico relativo ai numeri e alle primissime forme di conteggio. In tutte le sezioni le insegnanti hanno intervistato individualmente i bambini ponendo la stessa domanda: quanti anni hai? È una domanda che il bambino si sente rivolgere molto spesso dagli adulti, dalle persone note o al primo approccio. E solitamente il piccolo viene sollecitato dai familiari a rispondere almeno con il gesto, anche solo per imitazione. Si tratta di un quesito "facile", che evoca l'affetto e l'azione dei familiari e fa presagire, dopo la risposta, la gioia di una gratificazione.

Tante varianti

In alcune scuole l'esperienza è stata centrata solo sull'intervista individuale, senza ulteriori sollecitazioni da parte dell'insegnante. In altre realtà le insegnanti hanno suggerito ai bambini di quantificare e di rappresentare il numero dei loro anni con modalità diverse.
I bambini sono stati invitati a sperimentare almeno una delle seguenti esperienze:
• la rappresentazione grafica (contorno delle dita della mano, segni, numerali...);
• la manipolazione di oggetti presi dalla "scatola delle meraviglie" (bottoni, palline, perle, tappi di bottiglia...);
• la manipolazione di particolari artefatti (modelli della mano in cartone o in legno, pallottoliere...).
Ogni insegnante ha personalizzato il proprio percorso scegliendo attentamente il contenuto e le modalità delle proposte.

Quanti anni hai?

Alla richiesta individuale dell'insegnante i bambini hanno risposto fornendo:
• solo il nome del numero;
• solo il gesto della mano;
• il nome del numero e il gesto della mano insieme.
Non tutte le risposte sono risultate corrette: due, quattro, cinque gli "errori" più frequenti e, ovviamente, accolti e più che giustificati.
Anche il conteggio con le dita appare spesso in forma embrionale. I bambini di tre anni, però, contestualizzano la domanda e per rispondere utilizzano, più o meno correttamente, i numeri e alcune delle loro rappresentazioni (parole-numero e/o gesti). In pochissimi casi non c'è risposta o vengono date risposte non pertinenti.

Il dialogo e gli oggetti

• *Quanti anni hai?* • Scrittura del numero
• Manipolazione di oggetti
L'insegnane interagisce continuamente con il bambino, gratificandolo e dando, all'occorrenza, suggerimenti e rinforzi. Il bambino dispone di un foglio e di una biro. Sul tavolo, davanti a lui, una scatola piena di coloratissimi tappi per il vino in plastica.
Riportiamo una conversazione tipo.

– Quanti anni hai?
– Tre
– Fammi vedere com'è il numero tre con le manine.
– Non lo so.
– Se mi vuoi mostrare che hai tre anni con le manine, come le metti?
Gesto della mano: il bambino alza il pollice, l'indice, il medio.
– Bene, proprio così. Prova a contare le dita.
Il bambino con l'indice della mano sinistra tocca le punte delle dita della mano destra: prima l'indice (uno), poi il medio (due) e infine l'anulare (tre) che è abbassato.
– E il tre qual è?
Il bambino tocca il medio.
– Conta meglio, dai.
Il bambino tocca la punta dell'indice (uno), poi quella del medio (due), poi ancora quella dell'indice (tre).
– Adesso contiamo insieme.
Insegnante e bambino contano insieme.
– Bravo! Riesci a scrivere il tre su questo foglio?
Il bambino traccia uno scarabocchio.
– Quanti tappi prendi se ne vuoi prendere tre?
Il bambino preleva 3 tappi.
– Me li conti prima di infilarli nelle dita?
Il bambino appoggia i tappi sul piano del tavolo, li indica, conta fino a tre e poi li infila nelle dita.

– Conosci altri numeri?
– Cinque!
– Me lo fai vedere con la mano il cinque?
Il bambino mostra subito la manina.

Gli oggetti

• Quanti anni hai? • Manipolazione di oggetti
• Rappresentazione grafica della mano
• Scrittura del numero

L'insegnante consegna al bimbo un grande foglio opportunamente ripartito e una biro. Questa esperienza prevede la manipolazione di piccoli oggetti portati a scuola dai bambini e raccolti in una scatola (delle meraviglie) dall'insegnante. Il bambino sceglie un numero di oggetti corrispondente al numero dei suoi anni poi, insieme all'insegnante, li fissa sul foglio con il nastro adesivo.

– Quanti anni hai?
– Mi disegni il contorno della manina sul foglio?
(L'insegnane aiuta i bambini in difficoltà)
– Hai detto che hai tre anni. Prendi tre cose dalla scatola.
– Mi fai vedere che i bottoni sono tre? Li vuoi mettere vicino alle tre dita della mano? C'è un bottone vicino a ogni dito?
(Il bambino fissa gli oggetti scelti sul foglio)
– Mi scrivi il numero tre sul foglio?

Gli oggetti e il pallottoliere

• Quanti anni hai? • Rappresentazione grafica della mano • Manipolazione di oggetti • Scrittura del numero • Manipolazione del pallottoliere
Il bambino dispone di un grande foglio strutturato. Sul tavolo sono state messe delle immagini in cartoncino che rappresentano delle candeline per la torta di compleanno. Di fianco, un grande pallottoliere (vedi Tav. 5).

Tav. 5 •

Il pallottoliere gigante

Il pallottoliere gigante è un grande pallottoliere di legno naturale con queste dimensioni: altezza 95 cm; larghezza 75 cm. Le dimensioni sono state scelte per consentire un uso agevole fin dai tre anni. Le azioni necessarie per l'uso sono di pertinenza sia della motricità grossolana che della motricità fine. Tuttavia l'ampiezza del gesto necessario per spostare le palline (a volte perfino compiendo un piccolo passo) rende più difficile l'errore.
Le palline, di norma non colorate per evitare la sottolineatura contemporanea di troppe regolarità, hanno il diametro di 5 cm.
Nel pallottoliere trovano posto quattro file di palline (quaranta palline): il numero è stato scelto dalle insegnanti del corso di formazione per consentire la pratica della filastrocca dei numeri nelle occasioni più comuni della vita della sezione (l'appello, il conteggio dei giorni del mese, ecc.).

– Quanti anni hai?
(L'insegnante registra il numero sul foglio).
– Fammi vedere con le dita quanti sono. Mi disegni la manina sul foglio?
(L'insegnane aiuta i bambini in difficoltà).
– Quante candeline metti sulla torta? Incolla tante candeline quante sono le dita dei tuoi anni.
(Il bambino incolla nello spazio indicato le sagome delle candeline scelte)
– Il numero si può anche scrivere? Prova a scriverlo sul foglio.
– Mi fai vedere il numero tre sul pallottoliere?
– Ora prova a disegnarti mentre usi il pallottoliere.

Quanti hanni ho

QUANTI ANNI HAI?

TRE

FAMMI VEDERE CON LE DITA QUANTI SONO:

INCOLLA TANTE CANDELINE QUANTE SONO LE DITA DEI TUOI ANNI:

SI PUÒ ANCHE SCRIVERE? PROVACI:

La mano di cartone

• Quanti anni hai? • Rappresentazione del numero degli anni sulla mano di cartone
L'insegnante ha disegnato le sagome delle manine dei bambini sul cartone, le ha ritagliate, le ha dotate di un supporto e le ha presentate sul tavolo davanti a ciascun intervistato. Ad ogni bambino ha chiesto:

– Quanti anni hai?
– Me lo fai vedere bene con la tua manina?
– Mi conti i tuoi anni sulla mano di cartone?
– Mi fai un bel disegno dove mostri il numero dei tuoi anni con la manina?

La mano del pittore

• Quanti anni hai? • fotografia del gesto della mano del bambino • Riproduzione del gesto della mano sul modello di legno (mano del pittore).
Questa esperienza prevede due momenti distanziati nel tempo.
1. Ripresa fotografica del gesto del bambino che risponde all'insegnante mostrando il numero degli anni sulle dita della mano.
2. Il giorno successivo, il bambino manipola un artefatto (mano del pittore) per riprodurre il gesto della propria mano rappresentato nella foto scattata dall'insegnante. La presenza della foto e della mano di legno sollecitano il controllo.

– Quanti anni hai?
(L'insegnante fotografa il gesto della mano del bambino)
– Guarda bene la tua mano in questa foto e prova ad alzare le dita della mano di legno nello stesso modo.
– Ora controlla bene.
– Adesso ti vuoi disegnare mentre mostri il numero degli anni con la mano?

Per riassumere

Gli schemi di interazione riportati possono essere utilizzati anche con i bambini più grandi. Naturalmente, a quattro o cinque anni, si può prevedere un ricorso più esplicito al conteggio, alla scrittura dei numeri, all'utilizzo più raffinato di oggetti e artefatti, ecc.
Le diverse proposte documentate dimostrano che i docenti hanno saputo elaborare in modo competente diversi spunti del tema iniziale. Tutte le varianti e gli arricchimenti introdotti, come abbiamo detto, hanno puntato sulle potenzialità dei gesti, della rappresentazione grafica e della manipolazione di oggetti. Si assiste a due processi paralleli: da un lato c'è una sempre maggiore padronanza degli automatismi (la capacità di contare velocemente, di esibire in modo spontaneo la rappresentazione dei numeri sulle dita e con le dita), dall'altro c'è una esplicitazione dei processi messi in atto, della presa di coscienza del gesto prodotto in maniera automatica, del collegamento di tale gesto ad altre rappresentazioni dei numeri (anche scritte) che, secondo alcuni autori (vedi Tav. 6), è fondamentale nello sviluppo cognitivo dei bambini.

Altri spunti: giocare con le mani

Illustrazioni (pp. XII e XIII) di Elisa De Benedetti

Tav. 6 • **Le ricerche di Annette Karmiloff-Smith**

Karmiloff-Smith sostiene che "un modo tipicamente umano di raggiungere la conoscenza consiste nel fatto che la mente possa sfruttare internamente l'informazione già immagazzinata (sia essa innata o acquisita) ridescrivendo le sue rappresentazioni o, più precisamente, rappresentando in modo nuovo ciò che le rappresentazioni interne già codificano".
Il modello proposto da Karmiloff-Smith, detto di "ridescrizione rappresentazionale", o modello RR, considera come le rappresentazioni del bambino divengano più manipolabili e flessibili quando l'accesso alla conoscenza e alla costruzione di teorie diventa più consapevole.
La ridescrizione rappresentazionale risulta, quindi, un processo mediante il quale le informazioni implicite interne divengono in seguito conoscenze esplicite per la mente, prima in relazione ad un dominio particolare e poi, eventualmente, ad altri.
Karmiloff-Smith sostiene che il modello RR è in grado di spiegare meglio il passaggio dalle competenze preverbali alle parole-numero, descritto in letteratura da due teorie fondamentali: la teoria dei principi di conteggio, elaborata da Gelman e Gallistel, fondata sull'idea che i bambini piccoli possiedono un concetto innato di numero che evolve nell'acquisizione delle procedure di calcolo, e la teoria dei contesti diversi di Fuson e collaboratori, che attribuisce pari valore alle strutture innate e alle competenze apprese, considerando una costante interazione fra le due componenti (per questi autori si veda la Tav. 7).

IL GIOCO DELL'OCA

Il conteggio con le dita delle mani è tipico di alcuni giochi tradizionali, ma può essere introdotto come variante in giochi o attività che prevedono modalità diverse, come l'impiego dei dadi.
Si può modificare, ad esempio, il gioco dell'oca.
Con i bambini di quattro anni si può sperimentare un gioco dell'oca molto semplice, facilmente realizzabile con materiale di recupero.
La pista del gioco dell'oca è formata da 11 mattonelle di plastica molto grandi, appoggiate sul pavimento. La prima, quella della partenza, è contrassegnata dallo zero. Per i lanci si utilizza un solo grande dado ricavato da una scatola cubica di cartone sulle cui facce sono impresse le sagome delle mani che rappresentano i numeri dallo zero al cinque. Volendo, sulle facce del dado, si possono aggiungere le cifre o dei semplici contrassegni.
Le regole del gioco sono note. C'è un numero di partenza, lo zero, si lancia il dado che dirà se si deve avanzare di uno, due, tre passi...
Ci sono delle complicazioni: si possono fare zero passi, cioè si può restare fermi per uno o più giri, si può lanciare il dado due volte, fare un passo indietro o un passo in avanti...
A cinque anni, il numero delle mattonelle può essere aumentato e si può giocare con due dadi.

Indovinelli, composizione e registrazione di dati

A quattro e cinque anni si possono proporre degli indovinelli in tanti modi. Alcuni esempi: l'insegnante nasconde le mani, poi le mostra e chiede:

– Che numero ho fatto con le mie mani?
– Il numero che vi mostro con la mano è il tre? ecc.

Il bambino più veloce nel dare la risposta corretta subentra all'insegnante. La quale chiede:

– Mi mostrate il 5 con due mani?

I bambini nascondono le mani e le mostrano quando hanno elaborato una soluzione.
Le risposte possono essere date individualmente o, quando i numeri diventano più grandi, a coppie.
Le attività di composizione dei numeri con le mani possono essere rappresentate sul foglio attraverso le impronte delle mani, utilizzando manine di cartoncino preparate dall'insegnante.
Le manine di cartone o di plastica, fissate su un supporto, sono facilmente manipolabili dai bambini nelle attività di conteggio previste nel gioco o dalla *routine* dell'appello, dell'apparecchiatura, ecc.

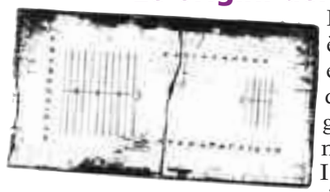
Il pallottoliere

Numerazioni e numerazioni concrete

I numeri sono stati inventati per memorizzare la quantità e per rappresentarla. I sistemi di rappresentazione dei numeri, cioè le numerazioni, concrete, parlate e scritte, rispondono all'esigenza di rappresentare le moltitudini numeriche e di effettuare calcoli (vedi anche Tav. 5 precedente).
Nelle numerazioni concrete il numero è rappresentato con segni fisici materializzati su supporti rigidi, come il legno, l'osso e la pietra, con oggetti naturali, come le perle e le conchiglie, o fabbricati dall'uomo, come i nodi su cordicelle, gli abaci e i pallottolieri.
Nelle numerazioni parlate, a ogni numero viene attribuito un nome, pronunciato oralmente o trascritto con lettere. Questi nomi sono le parole-numero: uno, due, tre...
Nelle numerazioni scritte si usano simboli particolari, ad esempio le cifre: 1, 2, 3...
Il mondo dei numeri dispone, perciò, di un triplice sistema di rappresentazione che risponde alla complessa necessità di vedere, nominare e scrivere i numeri. E proprio l'intreccio del canale visivo, con il gesto e la parola, svolge un ruolo funzionale nello sviluppo del bambino. Come af-

ferma Vygotskij, *"[...] i bambini risolvono i problemi pratici sia con l'aiuto del linguaggio, sia degli occhi, sia delle mani"*[10].
Gli artefatti fisici più raffinati, gli abaci e i pallottolieri, prevedono lo spostamento di oggetti e richiedono la padronanza di tecniche gestuali più o meno complesse. Chiamano in gioco il corpo e competenze legate ad aspetti percettivi, gestuali o sonori (il ritmico "tac" delle palline).
In Occidente la diffusione del calcolo scritto ha mandato in disuso abaci e pallottolieri, decretando l'abbandono delle numerazioni concrete e l'esclusione del corpo. In Asia, invece, l'abaco è tuttora il più diffuso strumento di calcolo.

Le origini del pallottoliere



La forma più antica di abaco è un tavolo di marmo del IV e V secolo a.C., una copia del quale è stata trovato nell'isola greca di Salamina nel diciannovesimo secolo.
I romani introdussero una versione tascabile dell'abaco già in età repubblicana: una tavoletta di metallo su cui scorrevano dei bottoni mobili. Questa versione è probabilmente passata in Cina, dove le scanalature sono state sostituite con aste, i bottoni con perline. Così è nato il *suanpan* cinese, passato poi, con lievi modifiche, in Giappone col nome di *soroban* e in Russia con quello di *scëty*. L'ufficiale napoleonico Jean-Victor Poncelet, catturato durante la Campagna di Russia, scoprì l'abaco russo durante la sua prigionia e rientrato in Francia ne diffuse l'uso per l'apprendimento dell'aritmetica.

Il pallottoliere nella tradizione didattica

Il pallottoliere, importato agli inizi dell'ottocento, entra molto presto nella scuola elementare italiana. Se ne raccomanda l'uso nelle guide per insegnanti: *"Si verranno proponendo quesiti relativi a cose note e sensibili, i quali si faranno da prima risolvere sul pallottoliere, indi sulla lavagna e sui quaderni"* (Istruzioni di A. Fava, 1860). Le sue fortune sono alterne, ma i programmi del 1945 lo estromettono senza mezzi termini dalla scuola di base: *"Per gli esercizi di numerazione e di calcolo intuitivo nelle prime classi, il buon senso ha ormai condannato il vecchio pallottoliere, come tipica espressione dei sussidi didattici preformati e usati fino alla noia, con scadimento di qualsiasi interesse"*.

In realtà, pur evocando il passato, questo artefatto sopravvive e gode di buona salute anche nell'era dei computer. Le sue tracce sono visibili sul piano di qualche seggiolone o in alcuni giochini e compare ancora in veste ufficiale nelle case e nelle scuole. È presente in molti cataloghi di giocattoli e di sussidi didattici, cartacei e digitali. Questa longevità si spiega probabilmente con motivazioni di tipo affettivo; tuttavia, è certo che l'adulto, attraverso l'uso del pallottoliere, può favorire l'interazione del bambino con particolari significati matematici custoditi e sedimentati nell'artefatto nel corso dei secoli. Nella didattica della matematica (a qualsiasi livello scolare) è opportuno servirsi di artefatti culturali, che funzionano come *accumulatori e tramiti dell'esperienza umana attraverso le generazioni* (Stetsenko[11]). Noi pensiamo che la scuola dell'infanzia sia il luogo ideale per analizzare e valorizzare il potenziale di questo artefatto culturale, così radicato nella tradizione familiare e scolastica.

[11] Citata in vedi M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, p. 148.
[12] Per una descrizione più accurata, con la traduzione di ampie parti del libro *The child's under standing of number* di R. Gelman e R.C. Gallistel, si veda M.G. Bar-

Il pallottoliere: un progetto di ricerca-azione nelle scuole dell'infanzia del Comune di Modena

La progettazione

Le linee guida del progetto di ricerca-azione "Esperienze sul contare: il pallottoliere" sono state discusse all'interno del corso di formazione "Spazio, ordine e misura" (a.s. 2008/09). Il corso, rivolto ai docenti delle Scuole Comunali dell'Infanzia di Modena, è stato condotto dalla prima autrice, coordinatrice del progetto. Le insegnanti, tenendo conto dei riferimenti teorici elaborati durante gli incontri di formazione, hanno condiviso alcune scelte:
• l'utilizzo sistematico dell'interazione verbale insegnante-allievo/i, come conversazione collettiva nel piccolo e nel grande gruppo o interazione individuale;
• il ricorso abituale a particolari sistemi di rappresentazione, gestuale, verbale e grafico, in sequenza o nello stesso tempo (es. gesto e parola);
• l'approccio ad un particolare artefatto culturale, creato "su misura": il pallottoliere gigante (vedi Tav. 5 precedente).

Il pallottoliere gigante

Nell'anno scolastico 2008/09 tutte le scuole comunali hanno introdotto attività sul pallottoliere gigante. La sperimentazione ha interessato oltre 20 sezioni, con bambini dai tre ai cinque anni. Tutte le scuole dei docenti coinvolti hanno ricevuto in dotazione dal Comune un pallottoliere gigante, progettato durante il corso di formazione. Si tratta di un pallottoliere con 40 palline, un numero che consente la registrazione dei presenti all'appello e il conteggio di giorni del mese.
Alle scuole è stato consegnato il materiale non assemblato.

Il montaggio dell'artefatto

Il montaggio del pallottoliere è stato realizzato:
– con la partecipazione dei bambini nel corso di una attività specifica;
– da un adulto, un nonno, in presenza dei bambini;
– da un adulto e presentato già montato ai bambini.
Il pallottoliere gigante è stato accolto con entusiasmo da tutti.

L'esplorazione dell'artefatto: il canovaccio comune

L'esplorazione del pallottoliere è stata realizzata collettivamente, nel gruppo o individualmente. Gli interventi pianificati dai docenti sono riconducibili al seguente canovaccio:

Tav. ? • **Il pallottoliere**

Domande dell'insegnante	Scopo
– Che cos'è?	Identificazione e nome dell'artefatto: ipotesi e raccolta delle esperienze pregresse.
– Com'è fatto?	Messa a fuoco del pallottoliere e zoom sulle varie parti che lo compongono. "Costruzione" o "ricostruzione" dell'oggetto e delle sue componenti attraverso la manipolazione e/o le parole e il disegno.
– Che cosa fa?	Funzionamento e modi di utilizzare il pallottoliere. Costruzione di schemi d'uso dell'artefatto.
– Perché lo fa? Spiega bene come si usa per non sbagliare.	La matematica del pallottoliere: i numeri e il contare.

Nel primo incontro con il pallottoliere ha prevalso la conversazione collettiva. Poi sono state date consegne individuali del tipo "disegna il pallottoliere" o "descrivi il pallottoliere".
Nella conversazione, la scelta di optare per un gruppo piccolo (5 o 6 bambini), o medio (circa metà della sezione), o grande (tutta la sezione), può essere oggetto di discussione. È evidente che non esiste un modo "migliore", che molto dipende dal contesto e dallo "stile" dell'insegnante, ma le prime due soluzioni possono essere adottate solo quando c'è compresenza.

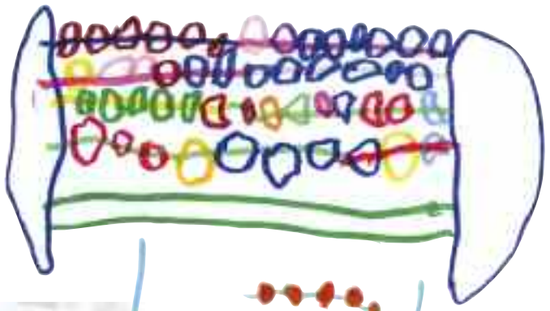
Un unico canovaccio, tanti percorsi

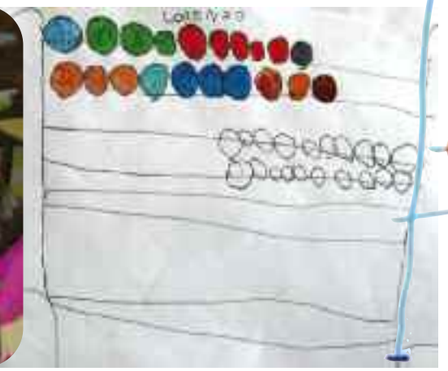
Sulla base della vasta documentazione prodotta, si possono descrivere alcune possibili azioni dell'insegnante. Nei paragrafi che seguono, saranno riesaminate con maggiore dettaglio le tappe del canovaccio comune.

– *Che cos'è?* Discussione collettiva orchestrata dall'insegnante

Davanti all'artefatto già montato

Con la domanda – *Che cos'è?* l'insegnante intende: far evocare la memoria di esperienze precedenti, creare collegamenti con altre esperienze, problematizzare per coinvolgere il bambino, far apprendere il nome "convenzionale" (pallottoliere, che comincia come PALLina). L'insegnante può continuare con domande del tipo: – *Avete mai visto una cosa così? Dove? Come si chiama? Perché si chiama così? A quale parola assomiglia? Ne abbiamo a scuola? Sono uguali?*





Davanti all'artefatto smontato, l'insegnante apre trasformando la domanda: – *Che cosa vi ho portato? Cosa vedete?*

Con la domanda l'insegnante intende: far evocare la memoria di esperienze, creare collegamenti con altre esperienze, problematizzare per coinvolgere il bambino, sollecitare la produzione di ipotesi, sottolineare la presenza di aste e di PALLine il cui nome comincia come PALLottoliere.
Può continuare con domande del tipo: – *Avete mai visto degli oggetti con tante palline?*
– *Come si chiamano? Dove li avete visti?*
– *Avete visto qualche volta un pallottoliere? Secondo voi con questi pezzi si può costruire un pallottoliere?* (Se nessun bambino ricorda un pallottoliere). *Ecco un pallottoliere* (giocattolo o immagine). *Ora monteremo i pezzi e in sezione avremo un pallottoliere gigante.*

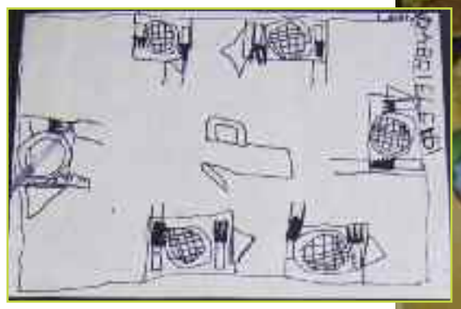
– *Come è fatto?* Discussione collettiva orchestrata dall'insegnante

Davanti a una immagine – davanti ai pezzi da montare – mentre un nonno lo monta con i bambini seguendo le istruzioni di montaggio – davanti all'artefatto pronto

Il quesito è una logica evoluzione della conversazione guidata dall'insegnante, che favorisce l'esplorazione dell'artefatto nella sua fisicità. L'insegnante vuole far: rappresentare con le parole le parti dell'artefatto; identificare le componenti e denominarle in modo corretto (aste, fili, palline forate, ecc.); descrivere le relazioni spaziali delle parti con l'uso di opportuni locativi (sopra, sotto, a fianco, dentro, ecc.); descrivere le funzioni delle varie parti (stare in piedi, scorrere, ecc.)...
Possibili variazioni o integrazioni (che arricchimento linguistico!).
• Racconto di una bambina che a casa ha assistito alla costruzione del pallottoliere.
• Disegno del pallottoliere (copia dal vero).
• *"Che cosa ci serve per costruirne un altro?"*.
• *"Come possiamo dare le istruzioni a un'altra sezione che ne vuole costruire uno così?"* Testo registrato-disegni in sequenza-testo orale da riferire individualmente o in gruppo.
• *"Il libro del pallottoliere"* costruito dai bambini (storia illustrata dell'esperienza).
• *"Disegna te stesso o un compagno alle prese col pallottoliere"*.
• Lettura di racconti sul pallottoliere.
• Narrazione di esperienze di un adulto.

Che cosa fa?

In alcuni casi, le conversazioni scivolano "naturalmente" anche su aspetti funzionali. In altri casi le insegnanti predispongono attività specifiche (es. gioco dei birilli) o riprendono attività tradizionali (es. appello) proponendo l'artefatto come aiuto per lo svolgimento del compito. Questo sviluppo introduce la voce dell'utilizzatore.
L'insegnante vuole far:
• praticare la filastrocca dei numeri (contare le palline);
• praticare l'uso del pallottoliere nelle ordinarie situazioni di conteggio;
• far emergere gli schemi d'uso;
Possibili variazioni o integrazioni:
– *Che cosa possiamo fare con il pallottoliere?*
– *A che cosa serve? Come funziona?*
– *Possiamo usarlo quando facciamo l'appello?*



Gabriele apparecchia il suo tavolo come da progetto

Durante l'appello: – *Proviamo ad usare il pallottoliere per registrare il numero dei presenti.*
– *Possiamo usarlo per contare i nostri anni? E le candeline della torta?*
– *Possiamo usarlo per contare questi oggetti? E i personaggi di una storia?*
– *Possiamo usarlo come segnapunti?*
Durante le partite di "biliardino", nel gioco dei birilli, ecc.: – *Registriamo i punti su due diversi fili del pallottoliere.*
– *Possiamo usarlo per l'apparecchiatura?*

Durante l'apparecchiatura: – *Quanti sono i presenti a scuola oggi? In quanti siamo in questo tavolo? Registriamo il numero dei bambini sul pallottoliere? Per ogni pallina mettiamo un piatto, un bicchiere, un tovagliolo... .*

– *Perché lo fa?* (Spiega bene come si usa per non sbagliare)

L'esplorazione cambia registro per far emergere i significati incarnati dal pallottoliere, per dare spazio alla voce della matematica. In questo l'insegnante assume in pieno il ruolo del mediatore culturale.
L'insegnante vuole far:
• esplicitare e socializzare gli schemi d'uso emersi;
• ricostruire in modo consapevole il sapere matematico accumulato, sedimentato sull'artefatto.
Possibili variazioni: – *spiega bene come si usa per essere sicuri di non sbagliare.*
(mostrando un pupazzo che sbaglia ad usare il pallottoliere)
– *Il Lupo Sciocco non sa contare.*
Quest'ultima azione dell'insegnante merita qualche commento in più perché, in collegamento con la precedente, stabilisce la possibilità che i bambini si approprino in modo cosciente del sapere matematico accumulato sul pallottoliere (vedi Tav. 7)

Il Lupo Sciocco non sa contare

L'insegnante interagisce con un piccolo gruppo.
Il Lupo Sciocco è rappresentato da un burattino, animato dall'insegnante che lo infila nella mano destra. L'idea del burattino è ispirata chiaramente dagli esperimenti di Alibali e Di Russo.
Il Lupo Sciocco dialoga sia con l'insegnante, che si sdoppia, sia con i bambini.
Nel corso dell'esperimento, per alcune operazioni particolari, anche i bambini potranno animare il burattino. L'attività si snoda nella forma di una rappresentazione teatrale in tre atti, centrata su un gioco delle parti che non varia: il Lupo Sciocco non sa contare, anche quando dichiara il contrario, e i bambini intervengono per correggerlo o per aiutarlo nel conteggio.
L'insegnante sollecita l'intervento dei bambini che mostrano incertezze.

1° atto: **Proviamo ad insegnare a contare al Lupo Sciocco**
Il Lupo Sciocco non sa contare bene, ma ci prova e commette tanti errori. Può sbagliare perché salta il nome di un numero nella filastrocca o ripete lo stesso nome più volte, perché salta una pallina, perché conta la stessa pallina tante volte di seguito.
Può sbagliare perché conta un oggetto inesistente tra due palline, perché non segue l'ordine lineare delle palline in una fila, perché ricomincia da uno ogni volta che cambia fila, perché sbaglia i nomi dei numeri, ecc.
I bambini intervengono per correggere il lupo e l'insegnante li coinvolge nel conteggio, aggiungendo una serie di richieste: *denominare correttamente il pallottoliere, spiegare com'è fatto, cosa fa... manipolare correttamente le palline, contarle tutte quante, proseguire il conteggio dopo una interruzione...*
L'insegnante fa rispettate i turni nella conversazione, chiede l'attenzione, ma accetta tutte le prestazioni dei bambini e li incoraggia senza dare valutazioni sulle prestazioni.

2° atto: **Io, Lupo Sciocco, vi dimostro che ora so contare**
L'insegnante utilizza questa provocazione per proporre il conteggio dei bambini presenti all'appello.
Il problema è più sofisticato, perché chiama in gioco il principio di *cardinalità*: il conteggio va interrotto quando il numero delle palline corrisponde a quello dei presenti e l'ultima parola numero pronunciata descrive la numerosità dei presenti. Anche qui i bambini vengono incoraggiati, aiutati a comprendere la richiesta, a tenerne conto, ma non vengono valutati.

3° atto: **Io, Lupo Sciocco, vi indico una pallina. Voi, mi aiutate a dire il numero?**
Il gesto dell'indicazione (Alibali, Di Russo) viene chiamato in gioco esplicitamente, all'interno di una sceneggiatura che può prevedere l'indicazione delle palline (con o senza partizione) da parte del lupo e la numerazione verbale del bambino o il contrario. Il lupo può essere sostituito da un bambino che conterà in coppia con un compagno, il burattino sarà utilizzato da un bambino, ecc. La teoria racchiusa nell'artefatto affiora a tratti nell'interazione: *ad ogni pallina indicata si deve associare una e una sola etichetta (parola-numero), non si deve ripetere la stessa parola-numero o saltarne qualcuna...* (principio di iniettività).

Tav. 7 • **Alcune ricerche sul contare**

Gli studi su bambini in età prescolare di Rachel Gelman e Charles R. Gallistel individuano un modello del contare centrato su cinque principi[12]:
• *infettività;*
• *ordine stabile;*
• *cardinalità;*
• *astrazione;*
• *irrilevanza dell'ordine.*
Gli autori descrivono il processo del contare inquadrando prima gli aspetti procedurali, poi i significati. I primi tre principi, inerenti le procedure, riguardano la domanda: – *come si fa a contare?*
Il principio di *iniettività* riguarda la capacità di coordinare due processi: la *ripartizione* e l'*etichettamento*. Per contare, il bambino separa, uno a uno, gli oggetti, spostandoli dall'insieme degli elementi Non-Contati a quello dei Contati (*ripartizione*).
Contemporaneamente assegna a ciascun elemento una etichetta, una parola numero: uno, due, ecc. (*etichettamento*)
Il principio dell'ordine stabile riguarda la necessità di non cambiare mai l'ordine delle etichette (nella fila dei numeri), sapendo che l'ultima etichetta (parola numero) usata definisce la numerosità del tutto, esprime la cardinalità dell'insieme (principio di cardinalità). In altre parole, alla domanda: "Quanti sono?", il bambino risponde con l'ultima parola numero pronunciata nel conteggio.
I principi di:
• *astrazione*: si può contare qualsiasi "cosa", concreta o astratta, reale o fantastica, se considerata , al di là dell'aspetto, come "unità" da conteggiare (vedi *I numeri e la mano*);
• *irrilevanza dell'ordine*: la numerosità non dipende dall'ordine seguito nel conteggio, puntano al mondo dei significati del numero.
La Fuson concorda con Gelman e Gallistel sul fatto che i bambini per poter contare devono possedere i principi dell'iniettività e dell'ordine stabile, ma è convinta che per la completa padronanza di questi principi occorra moltissimo tempo. Fuson osserva la grande varietà di uso e di significato della parola numero nei bambini e individua l'evoluzione dei concetti numerici distinguendo cinque livelli:
1. *Stringa*: il bambino produce la sequenza numerica a partire da uno come se si trattasse di un insieme indifferenziato (unoduetrequattro...);
2. *Catena che non si può spezzare*: produce parole sequenza a partire da uno e le parole sono differenziate (uno due tre...);
3. *Catena che si può spezzare*: inizia a contare da un numero dato; il bambino distingue tra un prima e un dopo (sei stato interrotto al cinque, quali numeri vengono dopo?);
4. *Catena numerabile*: le parole numero della sequenza sono trattate come entità distinte e unità equivalenti;
5. *Catena bidirezionale*: il bambino può contare velocemente in qualsiasi direzione e a partire da qualsiasi numero.
Molti ricerche su bambini in età prescolare si sono occupate delle modalità e delle difficoltà nel tener conto degli oggetti già contati dovendo, contemporaneamente, assegnare a ciascuno di essi la parola-numero corretta. Importanti studi di Alibali e Di Russo[13] concludono che i bambini contano in modo più accurato quando usano i gesti:
• toccare;
• segnare;
• indicare...
Le autrici dimostrano, operando su file di oggetti disposti sul tavolo (l'artefatto), che il gesto non solo aiuta i bambini a tenere traccia degli oggetti già contati, ma anche facilita l'attività di coordinamento nell'associare la parola-numero all'oggetto. In più, toccando o indicando gli oggetti, il bambino può alleggerire il carico della memoria di lavoro. In questo modo può impegnarsi in modo più produttivo in compiti complessi utili alla costruzione dei significati del numero (*astrazione-irrilevanza dell'ordine*). Alla luce di questa osservazione appare evidente che la memorizzazione sicura della *filastrocca dei numeri* è un requisito indispensabile. Nei lavori illustrati le autrici utilizzano dispositivi accattivanti, che tengono conto della dimensione affettiva e relazionale: un burattino animato dalle mani dell'osservatore aiuta nel compito o compie errori tipici che consentono di prendere distanza da e coscienza di errori possibili. È anche questo un modo di isolare dal flusso dell'azione uno schema d'uso dell'artefatto proposto, spostandolo dal piano dell'azione al piano della riflessione e favorendo quindi la ridescrizione-rappresentazionale del modello di Karmiloff-Smith (Tav. 6).

tolini Bussi, *cit.*, p. 58.
[13] Cfr. M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, p. 63.
[14] Tenere traccia e realizzare una corrispondenza biunivoca sono gli elementi fondamentali sottolineati nel principio di iniettività di Gelman, Galli-

Bambini 3-6 anni: *– Quali sono i significati matematici mediati/mediabili con il pallottoliere?*

• Contare palline

Le palline possono essere spostate facendole scorrere da una parte all'altra dell'asta durante il conteggio. Fare scorrere le palline sul filo durante il conteggio equivale a *tenere traccia*[14] delle palline già contate e di quelle ancora da contare. (partizione). Lo scorrimento (trascinamento) delle palline avviene durante la recita della filastrocca dei numeri. In questo caso è implicata anche la realizzazione di una *corrispondenza biunivoca* tra la parola-numero (numerale) pronunciata e la pallina trascinata (etichettamento).

• Contare oggetti

Un bambino nomina i compagni durante l'appello e un altro sposta le palline. Alla fine si conta. La corrispondenza biunivoca è tra bambini e palline. La traccia deve essere tenuta dal bambino che nomina i compagni. L'altro bambino deve spostare una e una sola pallina per ogni nome (corrispondenza biunivoca e cardinalità). Alla fine si contano le palline; si contano i bambini e si scopre che... se c'è una differenza, dove è stato l'errore?

• Analizzare i nomi dei numeri

Nell'uso del pallottoliere ci si accorge che fino a 20 (primi due fili) i nomi sono da imparare a memoria[15]. Dopo è come ricominciare da capo: ventuno, ventidue, ventitre ecc. La struttura del pallottoliere evoca la notazione posizionale in base dieci. Il pallottoliere è un accumulatore di questa invenzione dell'uomo.

Si può sottolineare la differenza tra questo pallottoliere che può servire in ogni situazione e i pallottolieri contestualizzati che servono solo in una situazione (es. sette palline per i giorni della settimana).

La scrittura dei numeri

Le rappresentazioni scritte dei numeri possono cioè essere considerate a tutti gli effetti dei veri e propri artefatti, come le mani o il pallottoliere, che consentono di s-velare i segreti (le regole) del sistema di notazione numerica. Nella scuola dell'infanzia non è necessario (anzi forse è inutile) spingersi ad analisi dettagliate sul sistema di notazione posizionale (raggruppamenti, decine, abaci, ecc.). È sufficiente entrare in contatto con le rappresentazioni dei numeri che sono parte dell'esperienza quotidiana dei bambini: le cifre, i numeri ad una o due cifre che rappresentano il numero dei presenti e degli assenti, le date sul calendario, le ore nell'orologio, eccetera. È possibile sottolineare, ad esempio, che nel completamento della prima fila e nel passaggio dalla prima alla seconda fila del pallottoliere c'è un cambiamento importante (il numero scritto passa da 1 da 2 cifre) e che nel passaggio alla terza e quarta fila si incontra una regolarità nella sequenza dei numerali orali (venti-due; venti-tre, ecc.). Ciò è possibile già a quattro e cinque anni, come mostrano le ricerche di Liliana Tolchinsky (vedi Tav. 8)

Tav. 8 • **La rappresentazione dei numeri: L. Tolchinsky[16]**

Nel libro *La culla della cultura* (2003) Liliana Tolchinsky descrive lo sviluppo delle conoscenze nel bambino piccolo che, manipolando i sistemi di segni convenzionali della lingua (parole) e dei sistemi di numerazione (numerali), sviluppa la comprensione del linguaggio e del mondo dei numeri. I numerali (numeri espressi in cifre, parole-numero...) non sono solo un "mezzo" per esprimere le conoscenze già acquisite, ma la loro esplorazione produce nuove informazioni sul sistema convenzionale di numerazione.
L'autrice sottolinea l'importanza del *territorio notazionale* (*sistema di segni convenzionali* utilizzati per la *notazione* del numero), meno studiato del *territorio concettuale* (*concetto* di numero).
Nella vita di tutti i giorni i bambini incontrano i numerali in molte occasioni: prendere l'ascensore, usare il telefono, fare la spesa, usare il telecomando del tv, ecc.
I numerali appartengono all'esperienza dei bambini e suscitano grande interesse.
La scuola può favorire lo sviluppo delle conoscenze relative al sistema di notazione attraverso:
• l'uso dei numerali in tanti contesti, partendo dalla motivazione dei bambini e dalla reale necessità di notazione richiesta da una particolare situazione;
• la manipolazione dei numerali, partendo dalla curiosità dei bambini per le attività di confronto, di ordinamento, di ricerca di somiglianze, differenze...
Anche i bambini molto piccoli sono in grado di ordinare i numerali da zero a nove e riescono a cogliere molto presto interessanti regolarità nel funzionamento della notazione posizionale.
Guardare i numerali, prestare attenzione ai loro nomi, percepire i modi con cui si parla di essi sono, per il bambino esperienze reali tanto quanto le esperienze sensomotorie che può compiere con palline, automobiline, sabbia o persone.

stel (vedi M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, p. 58).
[15] Nella scuola primaria, l'analisi linguistica dei numerali potrà far riconoscere il suffisso – dici o il prefisso dici – nei numerali da dieci a venti. Questa analisi sembra prematura nella scuola dell'infanzia.
[16] Vedi M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, p. 70.
[17] Vedi M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, p. 46.
[18] È al di fuori dello scopo di questo inserto ricostruire la storia istituzionale

Il complesso ruolo dell'insegnante

La progettazione e il funzionamento dell'attività

Dalle attività presentate in questo inserto (e da quelle ben più ampie descritte nel libro "I numeri e lo spazio" già più volte citato), emerge con forza il ruolo di mediatore culturale svolto dall'insegnante, responsabile dell'introduzione dei bambini alla cultura dei numeri, attraverso la proposta di opportune esperienze. In questo inserto abbiamo scelto di focalizzare in primo luogo il ruolo che opportuni artefatti possono avere in questo percorso. Avremmo potuto scegliere un filo conduttore diverso, ad esempio illustrando le attività quotidiane (es. appello, apparecchiatura, registrazione del tempo atmosferico sul calendario) e i forti legami che esse hanno con l'esplorazione del mondo dei numeri. Abbiamo preferito scegliere un taglio meno usuale, basato sugli esperimenti più recenti di ricerca-azione condotti in un territorio – il Comune di Modena – da sempre sensibile alle applicazioni dei più avanzati risultati della ricerca. Per altre possibili proposte rinviamo ancora una volta al libro "I numeri e lo spazio".
Vogliamo qui riassumere in uno schema finale il delicato ruolo dell'insegnante in questo processo. Possiamo distinguere due momenti: la progettazione dell'attività, il funzionamento dell'attività. Nel primo momento, l'insegnante deve compiere scelte oculate:
– Quali artefatti scegliere?
– Quali compiti-consegne proporre?
– Quali gli elementi del sapere matematico in gioco?
Nel secondo momento, l'insegnante deve gestire la ricchezza delle risposte dei bambini alle consegne, per orientarle verso la costruzione dei significati matematici:
– Come osservare i bambini all'opera?
– Come interagire con loro?
– Che cosa fissare nel tempo nella memoria dei bambini e del gruppo?
Riprendiamo nel seguito ciascuna di queste domande per dare alcune indicazioni al riguardo.

delle indicazioni per gli insegnanti della scuola dell'infanzia in Italia (vedi M.G. Bartolini Bussi, *cit.*, il capitolo 1.2).
[19] L.S. Vygotskij, Pensiero e Linguaggio, tr. it. a cura di L. Mecacci, Laterza, Bari 2004.

Quali artefatti scegliere?

In questo inserto la scelta è stata determinata dal rilievo storico-culturale. Abbiamo analizzato nei dettagli due artefatti materiali (le mani, il pallottoliere gigante), ricostruendone brevemente la storia nello sviluppo della cultura umana. Proprio il fatto che siano stati così importanti e, per certi versi, universali (anche se gli schemi d'uso sono connotati culturalmente) sostiene questa scelta: il sapere matematico accumulato su di essi viene da una lunga storia, che si articola nel tempo e nello spazio, e non dall'atto estemporaneo di un educatore che inventa un oggetto "nuovo" e lo promuove commercialmente, promettendo successi mirabili. A partire da questi artefatti, le insegnanti delle scuole dell'infanzia del comune di Modena hanno introdotto variazioni, studiato consegne particolari, dotandosi anche di criteri che consentono di analizzare il potenziale di altri artefatti eventualmente disponibili sul mercato o di crearne dei nuovi, con materiale a disposizione. Accanto a questi artefatti materiali abbiamo citato anche artefatti simbolici (il linguaggio naturale e il disegno; i gesti; i numerali orali e scritti ecc.) che consentono di ridescrivere l'azione in modi diversi e complementari.

Quale sapere è in gioco?

La scelta iniziale riguarda i numeri, le proprietà del sistema da essi costituito e il loro uso nelle pratiche sociali condivise. Non abbiamo esaurito le possibilità: ad esempio non abbiamo preso in considerazione il significato del numero come misura che costituisce un altro elemento forte in questo panorama , preferendo dedicare lo spazio disponibile ad un'analisi fine che potesse aiutare

l'insegnante nella definizione consapevole di percorsi didattici efficaci. Il sapere in gioco è alla base della matematica come scienza ed è raccolto ed interpretato nelle indicazioni nazionali per le scuole. In assenza di un documento recente che definisca i traguardi relativi ai numeri per la scuola dell'infanzia, abbiamo iniziato proponendo la versione adottata dalle scuole dell'infanzia del Comune di Modena come istituzione , che ha definito i traguardi in una versione più ricca rispetto alle Indicazioni del 2007.

Quali consegne scegliere?

Anche in questo caso abbiamo fornito numerose indicazioni, sia relative alle consegne di avvio (il primo problema posto) sia relative alle consegne di rilancio (utilizzabili nel corso dell'attività) sia relative alle consegne di riflessione (utilizzabili dopo l'attività). Si sono visti casi di consegne individuali, di piccolo, medio e grande gruppo.

Dalla progettazione al funzionamento

ARTEFATTO-SAPERE MATEMATICO-CONSEGNA

I tre elementi descritti costituiscono il "triangolo del potenziale" dell'artefatto, il triangolo a sinistra dello schema della tavola 9: è il progetto dell'insegnante e inquadra gli obiettivi da raggiungere; fornisce gli strumenti minimi per entrare nella scuola e operare in modo efficace. È un lavoro che può/deve essere fatto prima, in una situazione rilassata, con l'aiuto di colleghi e di risorse bibliografiche, perché tutto sia pronto prima dell'intervento con i bambini. Solo insegnanti molto esperti e professionalmente preparati riescono ad "improvvisare" attività efficaci, cogliendo occasioni estemporanee, ma non può essere la norma in una scuola che vuole funzionare.
Nella scuola si apre poi il capitolo delicato del funzionamento: come tradurre in realtà gli obiettivi? Come sfruttare il potenziale dell'artefatto scelto con tanta cura?

Come osservare i bambini?

Si possono osservare i bambini in tanti modi, a seconda degli scopi dell'osservazione. In questo caso l'attenzione è posta sulle tracce della costruzione progressiva dei significati matematici, con un duplice scopo:
– raccogliere gli elementi del processo (individuale e collettivo);
– sollevare a livello di coscienza gli elementi che strutturano tale processo.
Il primo scopo è legato all'**insegnare**: *come monitorare il processo per riorientarlo, rinforzarlo, ecc.?*
Il secondo scopo è legato all'apprendere: *come isolare nel processo gli elementi fondamentali* (la corrispondenza biunivoca, l'ordine, la relazione oggetto-gesto-pallina) *e renderli accessibili alla coscienza del bambino attraverso una ridescrizione rappresentazionale* (Tav. 6), *perché possa riutilizzarli in un altro compito*.
Insegnamento e apprendimento procedono insieme, come un unico processo. Questo assunto caratterizza la scuola di ricerca ispirata a Vygotskij, a cui apparteniamo. Come ricorda Mecacci nel Lessico vygotskiano , Vygotskij usa il termine obu enie, che indica il processo di trasmissione e appropriazione delle conoscenze, capacità, abilità e dei metodi dell'attività conoscitiva dell'uomo; è un processo bilaterale, attuato dal docente e dal discente, quindi intraducibile con uno solo dei termini apprendimento o insegnamento.
Le tracce raccolte nel processo sono di varia natura: ad esempio gli sguardi e i gesti compiuti (raccolti, se si prevede di doverli analizzare ed utilizzare, con piccoli video), i dialoghi e le conversazioni (raccolti con un registratore e successivamente trascritti, almeno nelle parti più significative), i disegni, ecc. Esse consentono all'insegnante di ricostruire il processo e, se opportunamente valorizzate (in cartelloni, quadernoni individuali, ecc.), consentono al bambino di prendere coscienza del proprio processo. Le tracce sono sempre collegate alla situazione, ricche di particolari, difficilmente ricanalizzabili dai bambini senza aiuto.

Come interagire con i bambini?

Al di là delle consegne previste si apre tutto lo spazio della interazione durante l'attività, con richieste via via più approfondite, con rispecchiamenti (ripetizioni di affermazioni fatte che rimbalzano la responsabilità di continuare al bambino o al gruppo). La professionalità richiesta cresce nel tempo e consente di alternare in modo efficace sia i momenti distesi di silenzio, per pensare e riflettere, che i momenti in cui il ritmo diventa più incalzante e in cui l'insegnante entra nel dialogo per far compiere un piccolo passo in più.
Diventa essenziale saper cogliere se nelle tracce prodotte dai bambini ci sono elementi che possono favorire lo sviluppo del processo: si devono considerare sia le tracce che fanno ipotizzare strategie efficaci sia le tracce che fanno ipotizzare difficoltà o errori. L'analisi dell'attività del Lupo Sciocco condotta in precedenza mostra vari esempi di questo tipo.

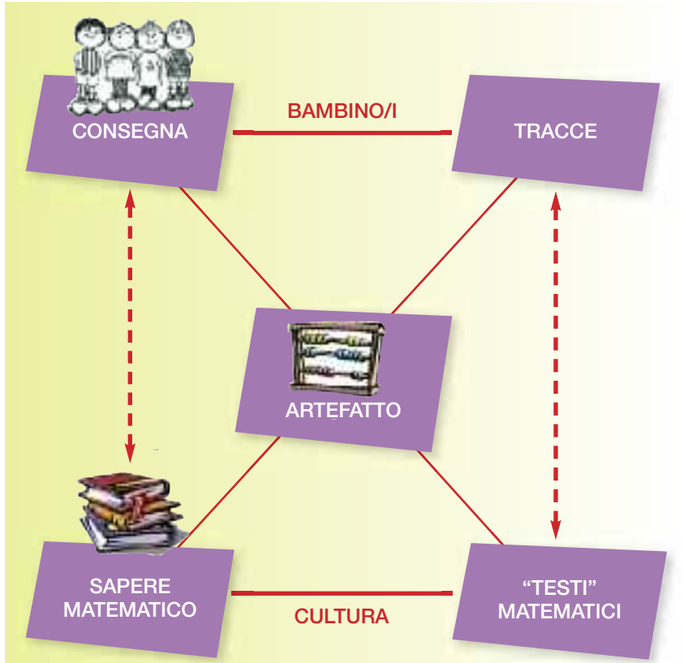
Che cosa fissare nel tempo nella memoria dei bambini e del gruppo?

Dal punto di vista dei significati matematici (che non esauriscono la ricchezza dell'esperienza) l'insegnante si dovrà interrogare sugli elementi essenziali del sapere in gioco, che devono essere fissati in modo esplicito e ripresi nel corso del tempo per essere posseduti con sicurezza. Si possono preparare "testi" collettivi (ad esempio, nella forma di cartelloni o di narrazioni orali da presentare ai compagni e ai genitori) in cui si scandiscono i processi (come si conta sulle mani, come si conta sul pallottoliere) collegandoli in modo esplicito (per l'adulto) agli elementi del sapere in gioco. Per questa fascia d'età essi possono essere considerati "testi" matematici a tutti gli effetti.

Lo schema riassuntivo

Lo schema della Tav. 9 riassume in forma sintetica quanto detto nei paragrafi precedenti. A sinistra sta la fase di progettazione, a destra quella di funzionamento. In alto è collocato il processo compiuto dai bambini, in basso i collegamenti di natura culturale tra ciò che si è costruito con i bambini e gli elementi del sapere in gioco. Al centro l'artefatto svolge il suo ruolo cruciale, per tenere insieme le diverse dimensioni del processo di insegnamento-apprendimento.

Tav. 9 • **Lo schema riassuntivo**



Per concludere

Il laboratorio di idee e di esperienze generato dal corso di formazione e sviluppato poi nelle scuole, ha visto come protagoniste le insegnanti. Non sono insegnanti alla ricerca di semplici ricette da "copiare", ma professionisti consapevoli, capaci di trasformare la didattica partendo dal bisogno di conoscere sempre meglio i bambini e la matematica. Molte delle operazioni dell'insegnante riportate in precedenza evocano particolari spunti teorici, offerti nel corso e tradotti con intelligenza e creatività nella pratica quotidiana. In questo inserto, ci siamo proposte di riproporre questo cammino. Le schede fuori testo offrono, appunto, gli approfondimenti necessari per comprendere che dietro alle scelte operate delle insegnanti (e, in vari casi, riproposte da studentesse e tirocinanti o laureande) ci sono precise indicazioni di natura teorica, riprese da risultati di ricerca antropologica, epistemologica, cognitiva e didattica e filtrate dall'occhio attento di insegnanti che riportano sempre il loro operare all'osservazione dei bambini, delle loro risposte, dei loro atteggiamenti. Sono insegnanti creative che spesso stupiscono anche chi ha avuto il compito di formarle, ma questa creatività trae linfa e nutrimento dagli approfondimenti teorici conquistati nel corso del tempo.

Ringraziamenti
Quasi tutte le attività descritte sono state inventate, progettate e documentate dalle insegnanti delle Scuole dell'Infanzia del Comune di Modena (Anderlini, Barchetta, C. Costa, Cimabue, Don Minzoni, Edison, Forghieri, Fossamonda, Malaguzzi, Marconi, Modena Est, S. Damaso, Saluzzo, Toniolo, Villaggio Artigiano, Villaggio Giardino, Villaggio Zeta). *A tutte loro, al Coordinamento pedagogico e all'Assessore all'Istruzione del Comune di Modena va il nostro affettuoso ringraziamento.*

per approfondire

M. Bartolini Bussi, *Un repertorio di esperienze per l'insegnamento della matematica nella scuola dell'infanzia*, in "Infanzia", dicembre 1989, pp. 39-41.
M. Bartolini Bussi, "Lo spazio, l'ordine, la misura", in G. Rubagotti (a cura di), *I Nuovi Orientamenti per la Scuola materna*, Fabbri, Milano1990.
M. Bartolini Bussi, *Matematica: i numeri e lo spazio. Bambini e saperi nella scuola dell'infanzia*, Edizioni Junior, Bergamo 2008.
M. Donaldson, *Come ragionano i bambini*, tr. it., Emme Edizioni, Milano 1979.
D. Guedj, *L'impero dei numeri*, Universale Electa Gallimard, Storia e Civiltà, 1997.
G. Ifrah, *Storia Universale dei numeri*, tr. it. Mondadori, Milano 1983.
A. Karmiloff-Smith, *Oltre la mente modulare. Una prospettiva evolutiva sulla scienza cognitiva*, tr. it., Il Mulino, Bologna 1995.