

La mostra

5.1. Introduzione

La mostra itinerante *Geometria a tu per tu* nasce all'interno del progetto *Matematica Insieme*, una convenzione stipulata tra l'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia Romagna, l'Istituto Regionale di Ricerca Educativa per l'Emilia Romagna e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia. L'allestimento è a cura dell'Associazione Macchine Matematiche, un'associazione senza fini di lucro, fondata da insegnanti che da anni si occupano della progettazione, della costruzione e della utilizzazione didattica di modelli fisici per l'apprendimento della geometria, in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia (sito dell'associazione: <http://associazioni.monet.modena.it/macmatem/>).

Dal 2003 tale mostra è stata ospitata nelle province di Ravenna, Bologna, Piacenza, Rimini, al Festival della Scienza di Genova nel 2004 e a Bergamoscienza nel 2005. Dal 5 Novembre al 23 Dicembre 2005 la mostra è stata allestita all'Istituto Regionale *Giuseppe Garibaldi* per i Ciechi, a Reggio Emilia. Ai modelli originali sono stati affiancati modelli adattati per non vedenti, che consentano una esplorazione aptica, preparati grazie alla collaborazione del Servizio di Consulenza Tiflopedagogica *Augusto Romagnoli* dell'Istituto. Le modifiche, per quanto riguarda gli strumenti piani (trasformazioni, curvigrafi), riguardano le figure disegnate, sostituite con scanalature nel legno che permettono

di essere seguite con le dita. Per quanto riguarda invece gli strumenti tridimensionali (genesi spaziale dell'affinità e della traslazione), i piani di plexiglas sono stati sostituiti con piani quadrettati o rigati che permettono alla mano di esplorare sia la faccia superiore, sia quella inferiore dei piani stessi e dei poligoni, costruiti in legno. I fili mantenuti in tensione da pesi sono stati sostituiti da fili elastici, che rimangono più tesi e hanno un diametro maggiore, quindi sono meglio percepiti.

La mostra, il cui è adatta a scuole di ogni ordine e grado, in quanto comprende la sezione sulle tassellazioni adatta alla Scuola Elementare e le sezioni sulle trasformazioni, sui curvografi e sulla prospettiva adatte invece alle scuole Medie e Superiori.

5.2. Le macchine esposte

I modelli raccolti nelle sezioni per le scuole Medie e Superiori sono:

Trasformazioni

- Parallelogramma, antiparallelogramma, compasso di Van Schooten
- Traslazione *
- Simmetria assiale*
- Rotazione
- Simmetria centrale *
- Glissosimmetria
- Stiramento
- Pantografo di Scheiner *
- Composizione di due simmetrie centrali
- Genesi tridimensionale della traslazione *
- Genesi tridimensionale dell'omotetia *
- Genesi tridimensionale dello stiramento

Curvigrati

- Compasso piano
- Parabolografo del Cavalieri *
- Ellissografo del Delaunay
- Ellissografo di Van Schooten
- Ellissografo con rombo articolato
- Iperbolografo ad antiparallelogramma*
- Ellissografo ad antiparallelogramma*

Prospettiva

- Vetro del Dürer
- Griglia del Dürer

Le macchine contrassegnate con l'asterisco sono quelle adattate per i minorati della vista. Accanto ad ognuna di esse è stata sistemata una scheda descrittiva in Braille, un disegno in caratteri ingranditi per ipovedenti e un disegno in rilievo, realizzato con il sistema Minolta* (un esempio di tali schede è riportato nell'allegato 3).

Le schede di queste macchine sono riportate nel capitolo 6, mentre il catalogo completo è disponibile sul sito: www.mmlab.unimore.it/geotupertu.htm.

5.3. La mostra

Per tutta la durata della mostra, essa è stata visitabile durante gli orari di apertura della Biblioteca. Per quattro mattine a settimana erano disponibili visite guidate su prenotazione per classi o gruppi e un pomeriggio a settimana, sempre su prenotazione, per i privati che desiderassero una guida. La mostra è rimasta inoltra

* Sistema Minolta per il disegno in rilievo: il rilievo si realizza a partire da una comune fotocopia grazie al rigonfiamento di cellule termosensibili depositate sulla carta in seguito all'esposizione del disegno ai raggi infrarossi. Solo le cellule su cui risulta depositato l'inchiostro nero assorbono il calore e quindi si espandono, mentre le parti bianche rimangono lisce.

allestita per tutto il mese di Gennaio 2006, a disposizione degli utenti della Biblioteca.

Durante il periodo di apertura è stata visitata da 18 classi: tre della scuola Elementare, quattro della scuola Media e le restanti undici dei due Licei Scientifici cittadini. Inoltre hanno richiesto una visita guidata un gruppo di insegnanti di scuole Medie e Superiori e un gruppo di sordociechi della Lega del Filo d'oro di Osimo (AN).

In due delle classi elementari che hanno visitato la parte sulle tassellazioni era presente un alunno con minorazioni visive: una bambina non vedente in una classe terza e un bambino ipovedente in una classe prima.

Ha visitato la mostra solo un'altra studentessa non vedente: una ragazzina di Piacenza, frequentante la scuola media, con il suo insegnante di sostegno.

Inoltre hanno visitato la mostra alcuni adulti non vedenti tra cui la signora Ginetta, che si è prestata anche alle riprese video girate dalla troupe del Centro televisivo di Ateneo (RElab TV), e la signora Alida, insegnante di materie letterarie che si occupa però da anni di attività di recupero e sostegno in ogni settore, in particolare quello matematico.

5.4. Gli alunni normodotati

Per una classe costituita da alunni normodotati, la visita inizia con una breve introduzione sulle macchine matematiche e sulle modifiche apportate a questa collezione per essere fruibili anche da parte di non vedenti.

Il primo strumento ad essere illustrato è il compasso di Van Schooten, cosa che permette di parlare di gradi di libertà, per poi mostrare subito come due compassi identici formino un parallelogramma e approfittando per presentare l'antiparallelogramma e guidare gli studenti nella descrizione delle sue proprietà, appoggiandosi a quelle a loro più familiari del trapezio isoscele.

Si passa poi alle trasformazioni, iniziando con il traslatore del Kempe, facendo notare agli studenti come si conservino le misure (la traslazione è quindi una isometria) e il verso di percorrenza (isometria diretta). Si prosegue poi con la simmetria assiale, notando come il verso di percorrenza non si conserva (isometria inversa). Successivamente è il momento di passare alla descrizione dello strumento per la simmetria centrale e a quello per la rotazione, tramite i quali i ragazzi possono verificare che la simmetria centrale altro non è che una rotazione di 180° . La macchina per la rotazione è di difficile intuizione per gli studenti, non solo perché su di essa non sono disegnate figure (che molto aiutano, dando già il risultato finale della trasformazione), ma anche perché è raro che la classe conosca la definizione di rotazione. Perciò, anche notando tramite un elastico che un angolo rimane costante, questo di rado fa accendere qualche lampadina nella loro mente.

Si accenna a questo punto alla classificazione delle isometrie, illustrando loro anche la macchina dell'ultima di esse: la glissosimmetria. Come esempio, si mostra poi come la composizione di due simmetrie centrali sia una traslazione e non di rado si sentono studenti esclamare: “Per forza, sono due rotazioni di 180° , quindi fa 360° !”.

Gli ultimi due strumenti di questa sezione realizzano trasformazioni che non conservano le distanze e subito le classi si rendono conto che non si sta più parlando di isometrie. Davanti allo strumento del Delaunay è opportuno chiedere agli studenti cosa succederebbe se si stirasse una circonferenza, perché poco dopo, nella sezione *Curvigrafi* si troveranno davanti ad un ellissografo basato proprio su questo principio.

Per quanto riguarda l'omotetia, molte classi non hanno mai sentito questo nome, ma conoscono molto bene la similitudine, perciò può essere utile riferirsi ad essa, accennando alle differenze che intercorrono tra le due trasformazioni, più o meno approfonditamente in base all'ordine o al tipo di scuola.

Terminati gli strumenti piani, si passa alle genesi tridimensionali, che possono essere legate alla teoria delle ombre (solari o prodotte da una sorgente

luminosa puntiforme) ed alla prospettiva, almeno per quello che riguarda le genesi tridimensionale dell'omotetia.

È interessante chiedere ai ragazzi quali proprietà si conservano nelle trasformazioni, in particolare nello stiramento: molte classi si spaccano nel decidere se viene o meno conservata la perpendicolarità, siccome alcuni notano che si conservano gli angoli retti del quadrato, trasformato in rettangolo, mentre altri che le diagonali del primo sono tra loro perpendicolari, viceversa quelle del secondo non lo sono.

La sezione sui tracciatori di curve si apre con i compassi piani, durante la spiegazione dei quali si può far riflettere gli studenti su come alcuni teoremi non siano solo condizioni necessarie, ma anche sufficienti: presa una corda e un angolo fissati, il luogo dei vertici di quell'angolo sarà una circonferenza.

Il parabolografo esposto, quello di Cavalieri, è semplicemente comprensibile anche da studenti di seconda media, in quanto si basa sul secondo teorema di Euclide. Successivamente si giunge ad un'equazione di secondo grado, ma molte classi riconoscono in essa la stessa equazione studiata e proposito della proporzionalità quadratica e di conseguenza la parabola. Di norma fino alla terza superiore incontrano solo parabole con l'asse parallelo a quello delle ordinate, mentre utilizzando il sistema di riferimento segnato sulla macchina si ha l'asse parallelo all'asse delle ascisse, ma se si ha la semplice avvertenza di spiegare ai ragazzi come la curva non cambi, il problema è risolto.

Tra gli ellissografi, spesso si evita di descrivere quello di Van Schooten, in quanto è poco intuitivo (non c'è nessuna curva disegnata) e si basa su una definizione di ellisse sconosciuta agli studenti, e di non immediata dimostrazione. Si mostra brevemente quelli di Delaunay, in quanto già citato nella sezione, quando si è parlato di stiramento, poi si giunge a quelli che si fondano sulla definizione metrica. Il più semplice è quella ad antiparallelogramma, in cui si riprendono le proprietà di questa figura illustrate all'inizio della mostra. A questo punto si può procedere con quello a rombo articolato, in cui gli studenti riescono a

riconoscere la stessa proprietà. Ad alcune classi è possibile far costruire un'altra definizione: l'ellisse come luogo dei punti equidistanti da un punto fisso e da una circonferenza direttrice, facendo in questo moto un importante collegamento con la definizione metrica di parabola.

L'iperbolografo ad antiparallelogramma risulta più semplice per chi sa già cosa cercare, chi ancora non conosce la definizione metrica di iperbole brancola nel buio e necessita di essere molto guidato per trarre le esatte conclusioni.

La mostra termina con i due strumenti sulla prospettiva, già citata a proposito della genesi spaziale dell'omotetia; nel modello del vetro di Dürer si possono apprezzare nuovamente le proprietà invarianti e quelle che invece non si conservano, come la distanza tra le linee della scacchiera, che si riducono man mano che ci si avvicina al punto di fuga. Infine un rapido sguardo alla griglia di Dürer, di cui si illustrano i miglioramenti rispetto al vetro e gli inconvenienti che ancora sussistono, e che saranno risolti da altri strumenti.

Questo è il percorso standard, ma in base alle esigenze delle singole classi, all'interesse mostrato dagli alunni, e all'ordine di scuola esso può subire cambiamenti. In una classe delle medie, ad esempio, si privilegerà la sezione delle trasformazioni, accennando solamente a quella dei tracciatori di curve; con un gruppo di studenti appassionati di disegno tecnico si passerà inoltre più tempo a parlare della prospettiva e del suo legame con le ombre.

5.5. I visitatori non vedenti

Per quanto riguarda le visite guidate a non vedenti, la strategia varia notevolmente: sono venuti studenti, professori, appassionati o semplici curiosi. Tranne in rari casi, si saltano le macchine per la rotazione, la composizioni di simmetrie e la glissosimmetria, che non hanno il modello modificato per la percezione aptica e hanno un grande numero di asticciole metalliche da tenere

sotto controllo contemporaneamente. Inoltre si omettono, per ovvi motivi, gli strumenti sulla prospettiva. Ma tutte le altre macchine possono essere toccate e comprese anche da chi è privo della vista, l'importante è utilizzare qualche accorgimento come dare un nome ai vertici e ai punti importanti durante l'esplorazione, per evitare di riferirsi ad essi con "questo" e "quello", tanto comune tra i vedenti, quanto inutile se non è accompagnato da un gesto che indica il punto in questione.

Il commento più comune tra i visitatori con minorazioni della vista è stato: *se ci fossero state queste macchine ai miei tempi, forse avrei capito qualcosa di matematica anch'io*. Altri invece lamentavano tutte le ore trascorse sui libri in Braille o ad ascoltare compagni leggere quelli "in nero" prima di capire determinate proprietà, che con strumenti di questo tipo avrebbero compreso e interiorizzato molto prima.

La signora Ginetta, grande appassionata di geometria, ha voluto toccare tutte le macchine e leggere tutte le schede, raccontando come non si sia iscritta al liceo scientifico per timore di non trovare nessuno che l'aiutasse, siccome era abituata a dettare a qualcuno le espressioni, ad esempio, facendo i passaggi a mente. Ma la passione per la matematica e la geometria in particolare non l'ha abbandonata e davanti a molte macchine spesso preveniva le spiegazioni o rispondeva alle domande dopo un'attenta esplorazione. Anche davanti a figure da lei mai studiate, quali la parabola o l'ellisse, riusciva con naturalezza a ricavare proprietà, commentando talvolta "si vede benissimo", riferendosi alla congruenza di alcuni segmenti che si dimostrava con facilità o che si stimava velocemente "a occhio" (anche questa espressione usata dalla signora Ginetta).

Ha visitato la mostra anche un gruppo di sordo-ciechi. Le spiegazioni dovevano essere tradotte dagli accompagnatori con il metodo digitale Molossi. Esso consiste nel toccare o pizzicare determinate zone anatomiche della mano, come le falangi, l'articolazione delle dita e la loro sommità. In ogni zona sono localizzate una o due lettere (quelle in azzurro sono da pizzicare).



Per trasmettere dei numeri, è sufficiente stringere leggermente il polso e poi utilizzare le lettere dalla a alla j, come nel sistema Braille.

Nonostante con un opportuno esercizio sia possibile raggiungere la stessa rapidità dei dattilografi, in questo caso è stato necessario ridurre al minimo le spiegazioni, utilizzando frasi brevi e facendo molte pause.

Si riporta un brano tratto dal diario della giornata:

La visita è stata lentissima e impegnativa: spiegare uno strumento a più persone contemporaneamente, senza che lo vedono o lo tocchino, è praticamente impossibile. Ma è impossibile anche far toccare lo stesso strumento a due persone, perché si ostacolano a vicenda con le mani. Inoltre quando si descrive una macchina a una persona cieca, ma che ci sente, la spiegazione e l'esplorazione possono essere simultanee, invece nel caso dei sordociechi no. Ho provato quindi a descrivere a grandi linee uno strumento, poi a farlo toccare a uno per uno, dicendo qualche altra parola. Ma chi aveva già esplorato si annoiava, e voleva vederne altri. Una degli accompagnatori, allora, si è messa a guardare altre macchine con una signora, "traducendo" quello che leggeva sulle schede illustrative. Queste schede sono però per "addetti ai lavori", parlano di isometrie, di corrispondenze biunivoche, di affinità, tutti

termini non comprensibili dal visitatore qualsiasi. Quindi ho cercato di dare qualche indicazione di massima a questa accompagnatrice (che per sua stessa ammissione “non ha mai capito niente di matematica” e confondeva le traslazioni con le simmetrie assiali), di dare qualche spiegazione molto veloce ad altri due accompagnatori, sfruttando il tempo, molto lungo, dell’esplorazione tattile, e di seguire più da vicino uno dei visitatori, che si dimostrava molto interessato a vedere e capire tutte le macchine. Si tratta comunque di strumenti che necessitano di qualche conoscenza di geometria alla base: è difficile descrivere il traslatore di Kempe a qualcuno che non sa, o non ricorda, cosa sia un parallelogramma. Una possibile soluzione sarebbe di avere molto tempo a disposizione per la spiegazione, ma a causa di alcuni disguidi con i mezzi pubblici, in realtà sono rimasti alla mostra per poco più di un’ora. La conclusione è stata che in questo breve lasso di tempo (ad una classe delle superiori composta solo da alunni vedenti si riescono a spiegare tutti gli strumenti in un’ora e mezzo circa) è stato possibile per i più interessati toccare quattro o cinque strumenti e seguire la spiegazione di due, per gli altri esplorarne uno o due e seguire le relative spiegazione. L’esperienza è stata molto stancante, credo che l’unico modo per rendere fruibile questa mostra anche ai sordociechi sia avere a disposizione una guida per ogni persona, oltre a un accompagnatore che possa tradurre in Molossi. Questo ovviamente se parliamo di un utente medio, perché una persona “del mestiere” probabilmente potrebbe seguire la mostra anche da solo, esattamente come un vedente (anche se qualche parola di spiegazione è sempre molto utile e apprezzata). Ritengo comunque che non sia impossibile utilizzare queste macchine anche con alunni che presentano entrambe le minorazioni, ma certamente bisogna prevedere un tempo sufficientemente lungo da dedicare all’esplorazione.

5.6. Alcune considerazioni critiche

Queste macchine non sono semplicemente una trasposizione di quelle “classiche”, ma sono espressamente progettate per allievi con minorazioni visive. Spesso le strategie utilizzate nella didattica per non vedenti si limitano a cercare di ovviare alla mancanza della vista, rendendo tangibile ciò che normalmente si guarda, ma senza sfruttare le peculiarità dell’esplorazione aptica.

Del Campo nell’introdurre le isometrie sostituisce il disegno tracciato con una matita con il disegno punteggiato, ma l’isometria rimane una trasformazione legata al movimento: un foglio di carta scivola su un altro e di conseguenza si sposta il disegno. La trasformazione viene confusa con il movimento, solo successivamente Del Campo propone esercizi in cui riconoscere se due figure sono traslate, ruotate, simmetriche...

L’approccio di una macchina matematica è completamente diverso, si svincola la trasformazione dal movimento. Anche nello strumento si realizza un movimento, che da un lato è propedeutico alla trasformazione, ma dall’altro non è direttamente collegato ad essa: ciò che a noi interessa è la corrispondenza tra il punto direttore e il punto tracciatore. La corrispondenza che si realizza è una corrispondenza puntuale, nonostante la macchina metta in relazione due regioni di piano. In ogni situazione c’è una corrispondenza tra il punto direttore e il punto tracciatore, dimostrabile per via geometrica, che dipende dai vincoli del sistema.

Anche per quanto riguarda i curvigrafi, ellissi, iperboli e parabole si svincolano dalla loro identità di sezioni coniche, e diventano curve generate basandosi su una qualsiasi loro proprietà, che non necessariamente coincide con le definizioni che siamo soliti utilizzare per questo oggetto. Mentre l’ellisse “del giardiniere” è costruita partendo dalla definizione di ellisse come luogo geometrico, in altre macchine il punto tracciatore è pilotato da un meccanismo che incorpora un’altra proprietà caratteristica della curva, che risulta un invariante rispetto ai movimenti che il sistema articolato subisce.

Questo approccio diverso, non si dimostra utile solo per alunni con minorazioni visive, ma si può applicare con successo anche alla didattica normale. Dunque l'uso di queste macchine nella scuola potrebbe costituire un laboratorio di integrazione per non vedenti, in cui anche i vedenti hanno risorse aggiuntive e più stimolanti rispetto ai soli lavagna e gesso.

Ricerche recenti, infatti, danno molta importanza all'approccio multimodale: l'interiorizzazione di un fenomeno si può sviluppare attraverso esperienze di natura diversa, quali il disegno, il linguaggio scritto, il linguaggio orale, le rappresentazioni mentali, i gesti, i movimenti corporei.

Questo legame tra la conoscenza e il sistema sensomotorio è stato confermato anche dalle neuroscienze: la scoperta dei cosiddetti neuroni mirror* ha portato alcuni scienziati a ipotizzare che il ragionamento astratto sfrutti il sistema sensomotorio (Gallese e Lakoff, 2005).

Arzarello (2006) sostiene, ad esempio, che mobilitando una varietà di sistemi semiotici diversi si possano aiutare gli studenti a costruire dei modelli per la conoscenza matematica. In quest'ottica si pongono le macchine matematiche:

la possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le macchine che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato differenti, ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche (*Curricolo di matematica per il ciclo secondario*)

Inoltre possono inserirsi in pieno nel laboratorio di geometria descritto in *La matematica per il cittadino* (2003): una serie di attività di rappresentazione e di esplorazione di situazioni geometriche atte a favorire la produzione di congetture, secondo la teoria dell'imparare facendo e vedendo fare.

* Neuroni mirror: neuroni che si attivano quando un essere umano o un primate (sono stati scoperti infatti nelle scimmie) compie un'azione, ma si attivano anche quando vede un altro individuo compiere la stessa azione. Sono stati studiati da Gallese V. e Goldman A.