

Modelli fisici per la matematica: strumenti per lo studio delle coniche¹

Marcello Pergola
Michela Maschietto

Riassunto. La prima parte dell'articolo presenta, attraverso l'uso di strumenti fisici e di opportune simulazioni in Cabri, alcune proprietà delle coniche in involuppo che ritroviamo in due contesti teorici del tutto diversi: nel trattato di Apollonio (proposizioni sulle tangenti) e nella geometria proiettiva (teoremi di Steiner). La seconda parte mostra che l'inversore del Peaucellier può essere trasformato in un semplice polarizzatore, con il quale le coniche involuppo sono generate partendo da una circonferenza. Infine, la terza parte illustra un metodo dovuto a de La Hire per costruire i punti di una conica data una circonferenza.

Abstract. This paper concerns conics. In the first part, it contains some properties of envelope conics studied using mechanical instruments and simulations made by Cabri. This part concerns two different theoretical contexts: the context of Apollonius's treatise (propositions about tangent lines) and that of projective geometry (Steiner's theorems). In the second part we discuss how Peaucellier's inversor can be transformed into a simple instrument, with which envelope conics are generated, starting with a circle. In the third part, a method formulated by de La Hire to construct points of a conic, starting with a circle is presented.

Marcello Pergola
e-mail: pernon@aliceposta.it

Michela Maschietto
e-mail: maschietto.michela@unimore.it

¹ Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto PRIN_COFIN03 n. 2003011072.

1. Coniche involuppo: parabola

Su una tavola verticale ben levigata (Fig. 1) collochiamo due asticelle di legno r ed s : la prima fissa, la seconda mobile e mantenuta dalle guide AB e CD (sotto le quali è infilata) a contatto col piano della tavola.

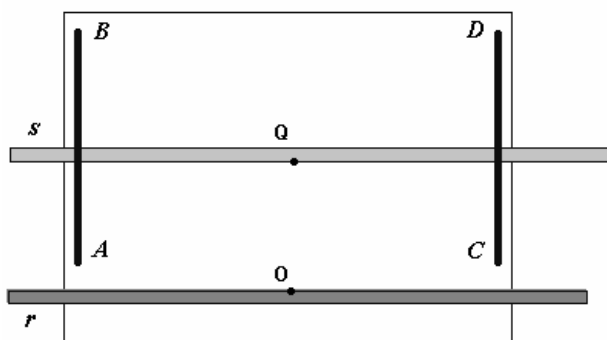


Fig. 1

Consideriamo ora una funzione lineare del tipo

$$y = mx + q \quad (1)$$

con $m < 0$; riportiamo sull'asticella s , a partire dal punto Q assunto come origine di un sistema di ascisse, i valori di x ; sull'asticella r , a partire dal punto O, i valori di y ; pratichiamo poi su entrambe le asticelle, in corrispondenza ad ognuno dei valori riportati, un piccolo foro; infine, attraverso ognuna delle coppie di fori che corrispondono a valori x, y soddisfacenti alla (1) facciamo passare un filo tenuto teso (per gravità) da una sferetta di piombo.

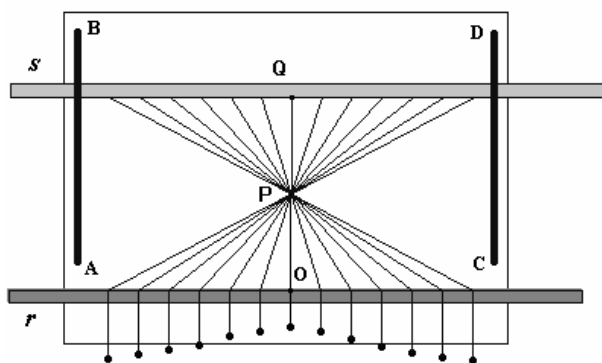


Fig. 2

Muovendo ora la s constatiamo che quando essa si mantiene parallela ad r tutti i fili passano per un medesimo punto P interno alla regione di piano delimitata dalle asticelle, come si vede in Fig. 2 (in cui per semplicità abbiamo scelto $m = -1$, $q = 0$); quando invece s ed r assumono direzioni diverse, appare improvvisamente un inviluppo non degenere (i fili devono essere abbastanza numerosi, cfr. Fig. 3 dove è ancora $m = -1$, $q = 0$).

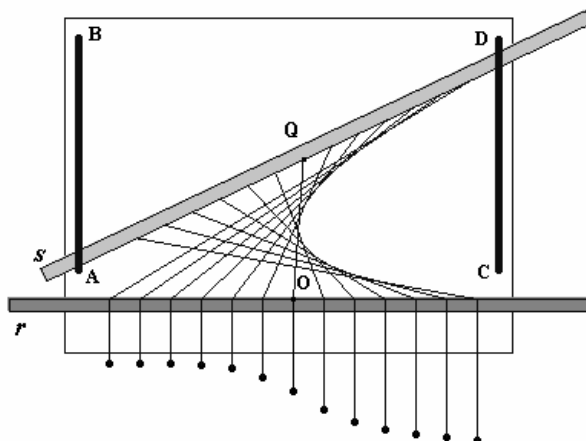


Fig. 3

L'esperienza si completa eseguendo una simulazione al computer, nella quale le due asticelle e i fili che congiungono i punti x agli y corrispondenti vengono rispettivamente sostituiti da due rette (le chiameremo QS e OR) e da segmenti non più assoggettati a vincoli fisici². Spostando nel piano, col mouse, le rette QS e OR (le quali trascinano nel loro movimento i punti x e y , che restano in posizione invariata rispetto alle origini O e Q) otterremo così numerosi inviluppi tutti simili a quello di Fig. 3. Sarà possibile verificare che anche QS e OR appartengono a tali inviluppi e cambiare a nostro piacere i valori di m e di q . Nell'esempio della Fig. 4, i valori di m e q sono rappresentati dalle lunghezze di due segmenti scelti arbitrariamente (abbiamo mantenuto $m < 0$ e indicato con S ed R i punti di contatto delle tangenti QS e OR , orientate da sinistra verso destra).

² Se viene utilizzato Cabri, si procede in questo modo: preso (sulla retta r) un segmento Qx variabile e costruito (sulla retta s) il segmento Oy corrispondente, si fa passare per gli estremi x e y un terzo segmento (di lunghezza opportuna) chiedendo poi il luogo descritto da quest'ultimo al variare di x .

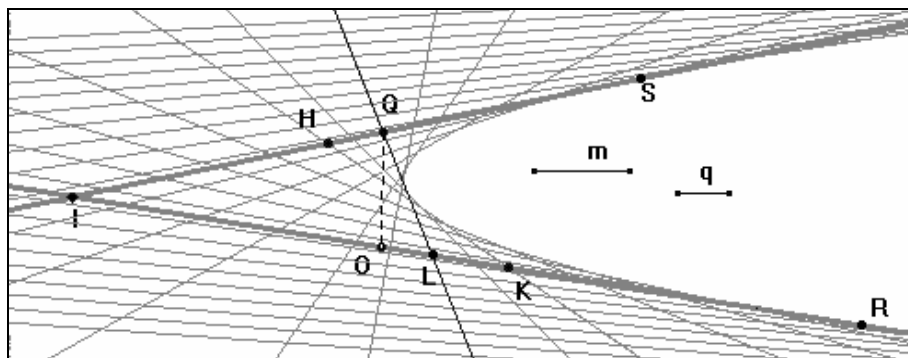


Fig. 4

Proseguendo l'esplorazione, verificheremo inoltre che le rette dell'involuppo diventano parallele quando QS ed OR si incontrano in un punto proprio I *unito* nella corrispondenza definita dalla (1) (Fig. 5, dove $m = -1$, $q = AB$), mentre convergono ad un punto proprio P quando QS ed OR sono parallele (Fig. 6, dove $m = 0,5$ e $q = AB$)³.

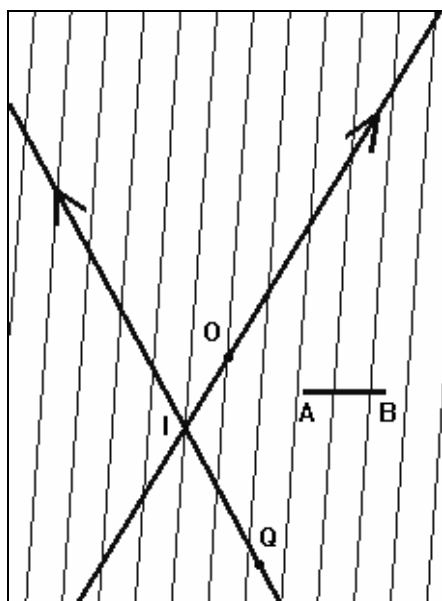


Fig. 5

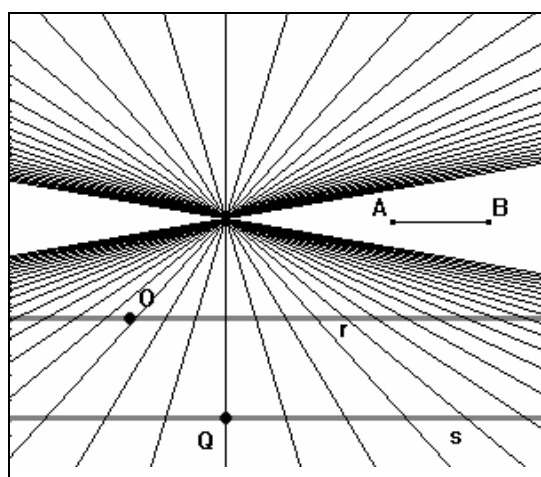


Fig. 6

³ P è esterno alla striscia di piano individuata da r ed s quando $m > 0$.

Giudicando ad occhio, tutti gli involuppi non degeneri osservati (sia nel modello fisico, sia nelle simulazioni) *sembrano* parabole.

Per rafforzare tale congettura, consideriamo uno qualunque degli involuppi ottenuti in precedenza, ad esempio quello di Fig. 4, e studiamolo più attentamente.

L'involuppo è formato dalle rette che, sulle due punteggiate QS ed OR incidenti in I, congiungono punti corrispondenti. Il punto R, determinato in base alla (1) a partire dal valore noto $QI = x$, corrisponde ad I (considerato come punto di QS); il punto S, determinato a partire dal valore noto di $OI = mx + q$, corrisponde ancora ad I (considerato però come punto di OR). Anche H e K, Q ed L sono coppie di punti corrispondenti: quindi il segmento KR corrisponde ad IH, mentre IK corrisponde ad HS e LK a HQ. Ma dalla (1) segue:

$$KR : IH = IK : HS = LK : HQ = m^4.$$

Con facili passaggi, risulta:

$$\begin{aligned} KR : IK &= IH : HS, \\ KR &= m \, IH \text{ e } LK = m \, HQ, \\ (LK + KR) &= m \, (HQ + IH), \\ (IK - LK) &= m \, (HS - HQ), \end{aligned} \tag{2}$$

cioè

$$LR : IQ = IL : QS,$$

e infine:

$$LR : IL = IQ : QS. \tag{3}$$

Da (2) e (3) si deduce che le rette HK e QL dividono i segmenti IS ed IR (appartenenti alle punteggiate QS e OR) in parti proporzionali. Tale conclusione è ovviamente valida per qualunque altra retta dell'involuppo che intersechi QS ed OR.

Ricorriamo ora ad un enunciato conosciuto fin dall'epoca classica: *tre rette tangenti a una parabola si incontrano dividendosi in parti che stanno nel medesimo rapporto* (Apollonio, *Coniche*, Libro III, Prop. XLI). Dunque i no-

⁴ Sul disegno in Cabri, la validità di queste proporzioni può essere anche verificata con la calcolatrice.

stri inviluppi hanno in comune con le parabole non solo l'aspetto, ma anche una delle loro proprietà.

Attualmente, il contesto più adeguato per l'inquadramento teorico delle esperienze sopra descritte è quello fornito dalla Geometria Proiettiva⁵.

Data infatti una parabola e due tangenti (proprie) ad essa, queste vengono intersecate dalle altre tangenti alla parabola secondo due punteggiate r ed s proiettive (*teorema di Steiner*), nelle quali i punti impropri si corrispondono (infatti la retta impropria è tangente alla parabola) e che dunque è una similitudine.

Quest'ultima affermazione può facilmente essere resa evidente. Contrassegniamo in qualche modo su r ed s , ad esempio con i simboli (A_1, A'_1) , (A_2, A'_2) , (A_3, A'_3) ... le coppie di punti corrispondenti. Muovendo le due punteggiate nel piano (senza mai sovrapporle), esse rimangono proiettive durante lo spostamento: se però accade che un punto P e il suo omologo P' coincidano entrambi con il punto di intersezione I tra le due punteggiate, si realizza la condizione necessaria e sufficiente affinché queste divengano prospettive. In tal caso, proiettando dal centro della prospettività i punti $A_1, A_2, A_3, \dots$ di r nei punti $A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ di s avremo situazioni grafiche simili a quelle illustrate in Fig. 2, Fig. 5, Fig. 6, in cui è immediato constatare che i punti impropri si corrispondono, e che la corrispondenza fra le due punteggiate è una similitudine (applicare il teorema di Talete). Osserviamo poi che la $y = mx + q$ (1) (possiamo anche scriverla $x' - q = mx$) è proprio l'equazione di una similitudine fra due punteggiate (a $x = 0$ su di una corrisponderà $x' = q$ sull'altra).

Vale anche la proposizione inversa: congiungendo i punti omologhi di due punteggiate simili (non prospettive) di un piano, si ottiene come inviluppo una parabola.

La proposizione XLI, Libro III, nelle Coniche di Apollonio

La storia della matematica, in particolare quella delle coniche (curve studiate ininterrottamente dall'antichità fino ai tempi moderni), è ricca di proposizioni la cui verità rimane immutata nel tempo. Tuttavia esse sono continuamente arricchite e trasformate (fino a cambiarne in profondità il significato e la rappresentazione mentale) dall'inserimento in contesti teorici sempre

⁵ Enriques, F. (1996).

diversi, dalla continua trasformazione del linguaggio con cui se ne parla, dalla costante espansione della rete di concetti a cui vengono collegate. Offrire occasioni di confronto tra argomentazioni rivolte al medesimo oggetto ma elaborate in epoche diverse è molto importante nell'attività didattica. In tal modo si crea un terreno di esercizio indispensabile per affrontare in seguito l'analisi delle relazioni tra i mutamenti nel pensiero matematico e l'evoluzione dello spazio culturale complessivo, delle strutture economiche e politiche della società.

Riportiamo perciò ora, dal libro III delle *Coniche* di Apollonio (ed. Heiberg), l'enunciato e la dimostrazione della già citata Prop. XLI:

“Tre rette tangenti a una parabola si incontrano dividendosi in parti che stanno nel medesimo rapporto.”

Dopo le osservazioni del paragrafo precedente, quanto riportato equivale ad affermare che se una di queste tangenti è mobile, i suoi punti di intersezione con le altre due si corrispondono in una similitudine.

Nella sua deduzione (applicata inizialmente al caso particolare di Fig. 7) Apollonio utilizza alcune proprietà della parabola e soprattutto il libro V della *Geometria* di Euclide.

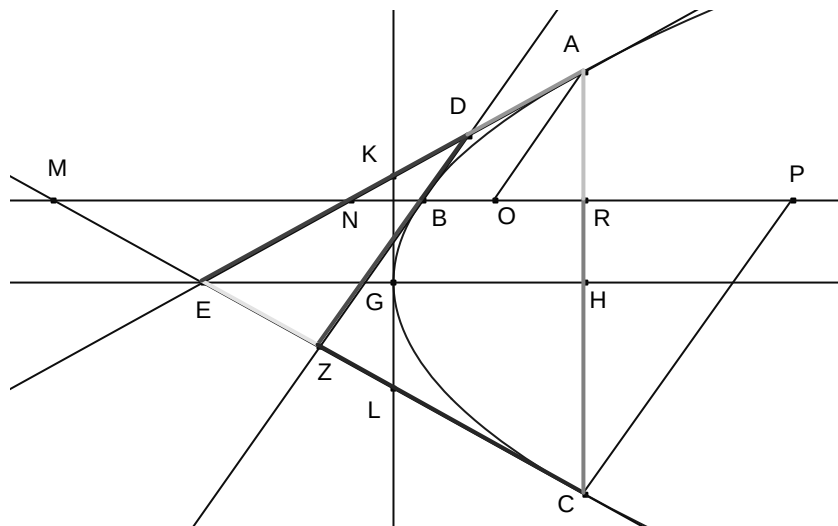


Fig. 7

Sia data la parabola ABC: ad essa siano tangenti (rispettivamente in A, C, B) le tre rette ADE, CZE, DBZ. La tesi è: $CZ : ZE = ED : DA = ZB : BD$.

A) Si tracci AC e se ne consideri il punto medio H. Si congiunga E con H: EH è un diametro della parabola. Se EH passa per B, allora DZ è parallela ad AC e divisa da EH in due parti uguali; in tal caso è anche $AD = DE$, $CZ = ZE$. Il teorema è dimostrato.

B) Supponiamo quindi che HE non passi per B, ma per un altro punto G della parabola. Tracciamo KL, parallela ad AC passante per G. Per ciò che si è appena osservato, risulta

$$AK = KE \text{ e } CL = LE. \quad (4)$$

Tracciamo inoltre:

- la parallela ad EH passante per B segnando i punti M, N, R (che sono, rispettivamente, le intersezioni di tale parallela con EC, AE, AC);
- le parallele alla retta DZ passanti per A e per C (che incontrano, rispettivamente, MR in O e in P).

Poiché MR ed EG sono parallele, anche MR è un diametro il quale incontra DZ in B, sicché AO e CP sono direzioni ad esso coniugate: quindi risulta $MB = BP$ e, di conseguenza, $MZ = ZC$. Ricordando le (4) ricaviamo dunque:

$$MC : ZC = EC : LC.$$

Permutando:

$$MC : EC = ZC : LC.$$

Inoltre (triangoli simili)

$$MC : EC = RC : HC.$$

Abbiamo poi (confrontando le due proporzioni precedenti)

$$ZC : LC = RC : HC, \quad (5)$$

e anche

$$LC : EC = HC : AC = 1 : 2. \quad (6)$$

Moltiplicando membro a membro (5) e (6) otteniamo

$$ZC : EC = RC : AC,$$

cioè

$$AC : RC = EC : ZC.$$

Convertendo,

$$AC : (AC - RC) = EC : (EC - ZC)$$

cioè

$$EC : EZ = AC : AR.$$

Scomponendo,

$$(EC - EZ) : EZ = (AC - AR) : AR$$

ossia

$$ZC : EZ = RC : AR. \quad (7)$$

Ma dall'essere MB un diametro, AN tangente in A alla parabola, AO direzione coniugata al diametro MB, deduciamo

$$NB = BO \text{ e } ND = DA.$$

Da questa osservazione, e dal fatto che $AK = KE$, segue

$$AE : AK = AN : AD;$$

permutando,

$$AE : AN = AK : AD.$$

Notiamo ancora che

$$AE : AN = AH : AR.$$

Confrontando le due proporzioni precedenti:

$$AK : AD = AH : AR. \quad (8)$$

Teniamo ora conto del fatto che

$$AC : AH = AE : AK = 2 : 1. \quad (9)$$

Moltiplicando membro a membro (8) e (9) possiamo scrivere:

$$AC : AR = AE : AD.$$

Scomponendo:

$$(AC - AR) : AR = (AE - AD) : AD,$$

cioè

$$RC : AR = DE : AD.$$

Confrontando quest'ultima proporzione con la (7):

$$RC : EZ = DE : AD.$$

Dai triangoli simili AOR, CPR ricaviamo altresì

$$RC : AR = CP : AO;$$

essendo poi

$$CP = 2BZ,$$

$$AO = 2BD,$$

$$AN = 2 ND,$$

concludiamo infine:

$$RC : AR = ZB : BD = CZ : ZE = ED : DA, c.v.d.$$

Il ragionamento si estende ad ogni altra parabola, a qualsiasi terna di tangenti.

Uno strumento per generare parabole inviluppo

Un semplice strumento meccanico per generare parabole inviluppo è il seguente. Su una tavola piana di legno (Fig. 8) viene praticata una guida rettilinea r e fissato un perno F (non appartenente ad r).

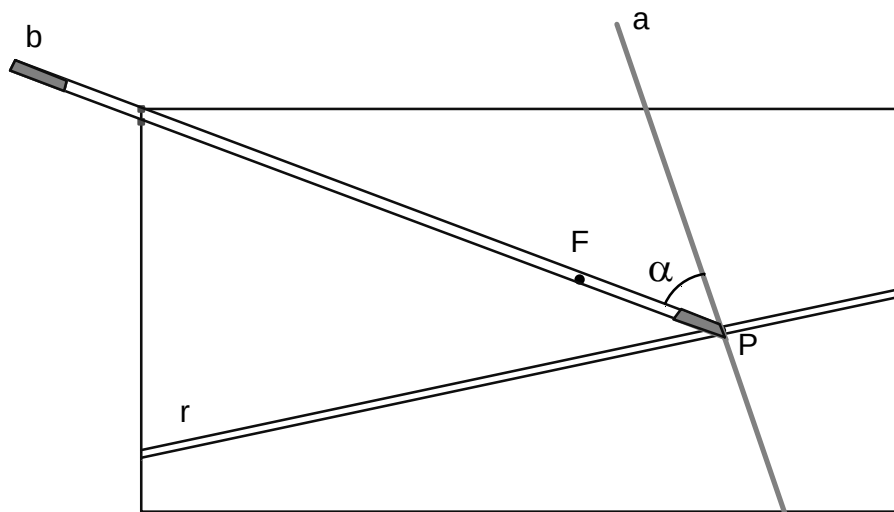


Fig. 8

Si congiungono poi due aste metalliche rettilinee **a** e **b** in modo da formare un angolo di ampiezza invariabile α e vertice **P**. L'asta **b** presenta una scanalatura nella quale si inserisce il perno **F**; un cursore, fissato a **P**, può scorrere su **r**.

Mentre **P** percorre la guida **r** trascinando con sé l'asta **b** che è costretta a passare per **F**, l'asta **a** genera una parabola involuppo: a questa, che ha caratteristiche metriche dipendenti dal valore di α , appartiene anche la retta **r**.

Per dimostrarlo, il metodo più rapido sarebbe usare alcune nozioni di Geometria Proiettiva⁶. Ma non è necessario.

⁶ Tra le proprietà metriche delle coniche studiate in Geometria Proiettiva ricordiamo:

- a) Il segmento di una tangente variabile ad una conica compreso fra due tangenti fisse è visto da un fuoco secondo un angolo costante:
- b) Si chiama parabola una conica che ammette come tangente la retta impropria del suo piano. Se si conduce da **F** (Fig. 9) una parallela all'asta **a**, si osserva che la semiretta **Pa** viene vista da **F** secondo l'angolo costante di ampiezza $\pi - \alpha$.

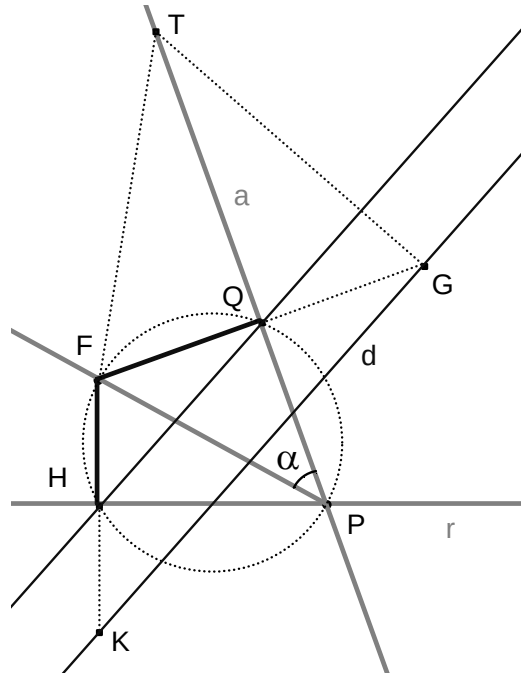


Fig. 9

Sia infatti Q (Fig. 9) la proiezione ortogonale di F su a e H la proiezione ortogonale di F su r . Poiché gli angoli $F\hat{H}P$ ed $F\hat{Q}P$ sono retti, il quadrilatero FHPQ è, per ogni posizione di P su r , inscritto in una circonferenza di diametro FP. Quindi, qualunque sia la posizione di P su r , gli angoli $F\hat{H}Q$ e $F\hat{Q}P$ sono entrambi $= \alpha$. Quando P descrive la retta r , il punto Q descrive perciò la retta HQ (fissa) inclinata di $90^\circ - \alpha$ su r . Il punto G, simmetrico di F rispetto ad a , è, in ogni posizione, corrispondente di Q in una omotetia di centro F e rapporto 2, perciò anch'esso descrive una retta (d , fissa) parallela ad HQ e passante per K, simmetrico di F rispetto ad r .

Se si traccia da G la perpendicolare a d (KG) fino ad incontrare in T la retta a , si ha che T è sempre equidistante dal punto F e dalla retta d : pertanto appartiene a una parabola di fuoco F e direttrice d , avente a come tangente in T.

La Fig. 10 mostra uno degli involuipi ottenuti con questo strumento⁷.

⁷ Un caso particolare si ha quando α è un angolo retto: la retta r è allora podaria della parabola rispetto al fuoco (tangente alla parabola nel vertice). Cfr. Pergola & Maschietto (2004).

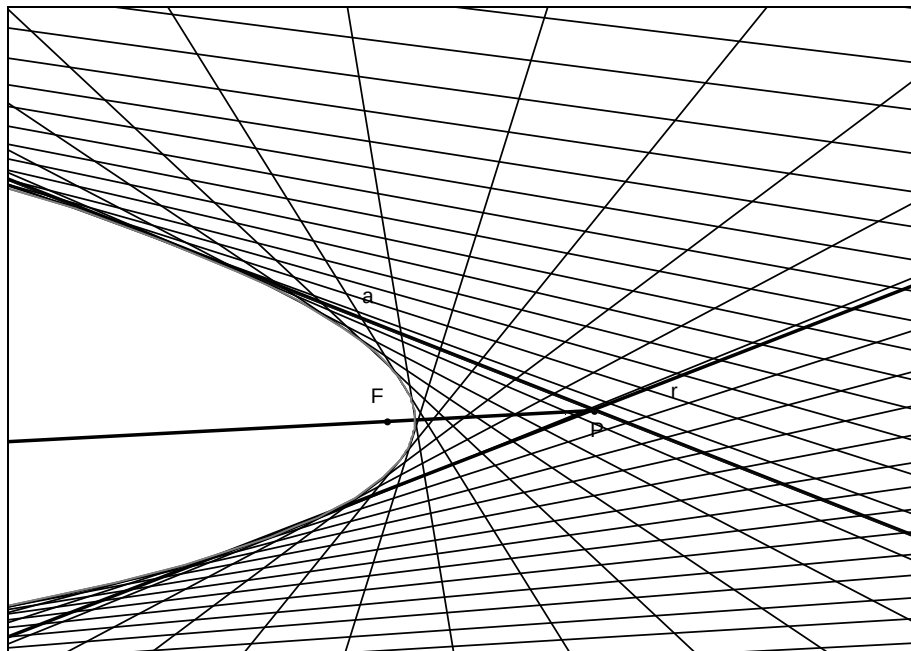


Fig. 10

2. Coniche inviluppo: ellisse e iperbole

Riprendiamo l'apparecchiatura di Fig. 1. Sia data la funzione

$$y = k : x, \quad (10)$$

con $k > 0$; riportiamo i valori di x sull'asta s e quelli di y sulla r (a partire dalle origini Q ed O rispettivamente), perforando sia s che r in corrispondenza ai valori riportati. Attraverso ognuna delle coppie di fori che individuano valori x, y soddisfacenti alla (10) si fa passare un filo (tenuto teso da sferette di piombo).

Appare la configurazione di Fig. 11.

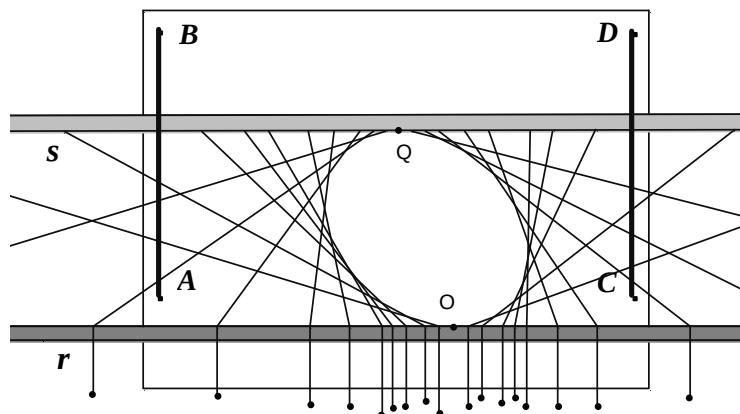


Fig. 11

Sembra trattarsi di un'ellisse involuppo, a cui appartengono anche le rette r ed s . Sottoponendo queste ultime (inizialmente parallele) agli spostamenti consentiti dallo strumento, sembra inoltre che l'involuppo conservi le sue caratteristiche metriche (cfr. Fig. 12).

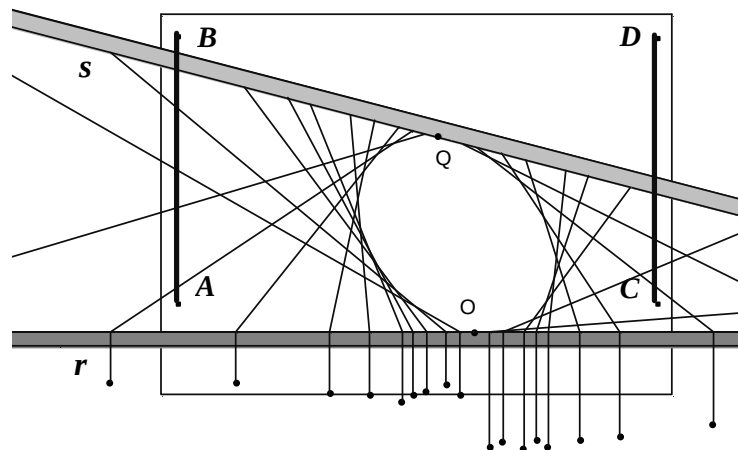


Fig. 12

L'esperienza si arricchisce ulteriormente con opportune simulazioni dove i fili sono sostituiti da rette (o segmenti) che congiungono punti omologhi nella corrispondenza definita dalla (10), in cui l'assenza di vincoli fisici permette maggiore libertà di movimento.

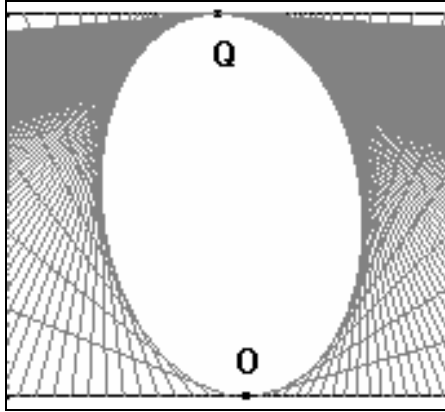


Fig. 13

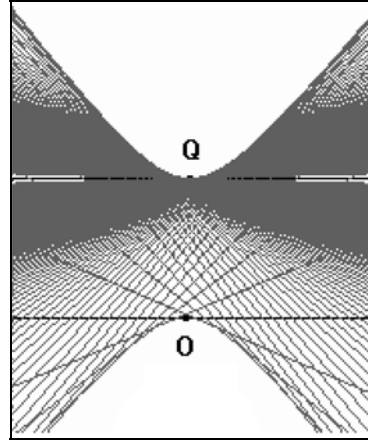


Fig. 14

Partiamo ad esempio dalla situazione illustrata in Fig. 13 (riproduzione virtuale del meccanismo di Fig. 11) e facciamo ruotare la retta s di 180° attorno a Q senza spostare su di essa la posizione dei punti x : si passerà gradualmente da involucri di forma analoga a quella iniziale ad altri affini all'involuppo terminale rappresentato in Fig. 14 (la congettura più semplice è che si tratti di una iperbole). In una delle configurazioni intermedie l'involuppo sarà degenerare, cioè le rette congiungenti coppie di punti corrispondenti passeranno per un medesimo punto, dal quale quindi la retta r sarà proiettata su s , o viceversa (cfr. Fig. 15). Il passaggio dall'involuppo di Fig. 13 a quello di Fig. 14 potrebbe essere ottenuto cambiando nella (10) il segno di k e mantenendo immobili sia r che s .

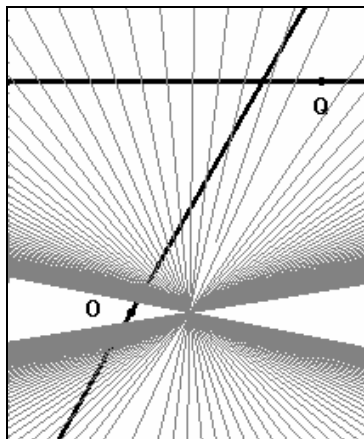


Fig. 15

La Geometria Proiettiva dà anche in questo caso una spiegazione esauriente di ciò che abbiamo osservato, e convalida la congettura (dettata subito dall'intuizione) che gli involuppi ottenuti siano coniche.

Infatti la (10), che possiamo scrivere nella forma $x \cdot x' = k$ (relazione bilineare in x e x') individua tra le punteggiate r ed s una proiettività in cui O e Q sono punti limiti (essendo ambedue propri, non può trattarsi di una similitudine)⁸. Dunque le rette congiungenti i punti omologhi involuppano (teorema di Steiner) una conica a centro. Affinché s ed r siano in posizione prospettiva (come nell'esempio di Fig. 15) occorre e basta che il loro punto di intersezione sia unito (in questo caso la conica involuppo è degenera).

Se poi s ed r diventano parallele, O e Q sono punti di contatto, e quindi estremi di un diametro della conica luogo corrispondente.

Possiamo anche dire: si considerino due tangenti proprie parallele r ed s di una conica a centro e i loro punti di contatto O e Q ; una tangente variabile della conica sega le r ed s in due punti tali che il prodotto k delle distanze di essi da O e Q è costante.

La proposizione XLII, Libro III, nelle Coniche di Apollonio

L'ultimo teorema qui sopra enunciato era noto anche ai geometri classici. Riportiamo qui di seguito l'enunciato di Apollonio (nel quale viene dato un particolare significato geometrico alla costante k) e la relativa dimostrazione.

*Se in una iperbole o ellisse o circonferenza (quindi – diremmo noi – in una conica a centro) si tracciano agli estremi opposti di un diametro due rette parallele aventi direzione coniugata a quella del diametro, ogni altra retta tangente alla conica taglia quelle parallele (anch'esse tangenti) in parti tali che il rettangolo da queste individuato è costante (uguale alla quarta parte della figura applicata al diametro stesso)*⁹ (Apollonio, *Coniche*, Libro III, Prop. XLII, ed. Heiberg).

⁸ Ricordiamo il teorema: *in due punteggiate proprie proiettive, non simili, il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limite è costante*. Questa elegante definizione metrica della proiettività tra due rette segue immediatamente dalla conservazione del birapporto di 4 elementi nella proiettività tra due forme di prima specie.

⁹ Ricordiamo che Apollonio chiama *figura applicata a un diametro* (nelle coniche a centro) il rettangolo avente come dimensioni tale diametro e il lato retto ad esso relativo. Le parabole sono prive di figura.

Consideriamo in primo luogo un'ellisse; AB sia uno dei suoi diametri (cfr. il caso particolare di Fig. 16, in cui come diametro è stato scelto l'asse maggiore). Si traccino due rette parallele aventi direzione coniugata al diametro AB, passanti rispettivamente per A e per B (e quindi tangenti all'ellisse). Una terza tangente (sia E il suo punto di contatto) intersechi in C la retta uscente da A, in D quella uscente da B. Allora si ha che $AC \times BD$ è la quarta parte della *figura* applicata ad AB.

Sia infatti Z il centro della conica, dal quale facciamo uscire una retta parallela ad AC e BD, che incontri in H l'ellisse e in G la tangente all'ellisse condotta per E. Anche ZH ha direzione coniugata al diametro: perciò $ZH \times ZH$ è uguale a un quarto della *figura* applicata ad AB¹⁰.

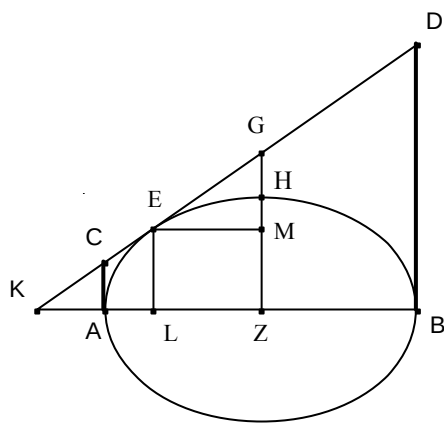


Fig. 16

- A) Supponiamo ora che H ed E coincidano: in tal caso risulta $AC = BD = ZH$, dunque la tesi è dimostrata.
 B) Supponiamo invece che H ed E siano distinti. Prolunghiamo AB e DC fino al loro punto di intersezione K. Facciamo inoltre uscire da E la parallela EL alla retta AC e la parallela EM alla retta AB (L si trova su AB, M su ZH).

¹⁰ Qui Apollonio fa riferimento alla proprietà caratteristica (*sintomo*) dell'ellisse. Se usiamo notazioni moderne tale proprietà si scrive (assumendo in Fig. 16 un riferimento cartesiano di origine A, assi x e y coincidenti rispettivamente con le rette AB, AC; indicando la lunghezza del segmento AB con $2a$, quella del lato retto con $2p$): $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$. Quando $y = ZH$ si ottiene $y^2 = pa$, cioè un quarto di $4pa$ (*figura* dell'ellisse).

Risulta¹¹:

$$KZ \times ZL = AZ \times AZ,$$

quindi (*Euclide*, VI, 17)

$$KZ : AZ = AZ : ZL.$$

Inoltre (*Euclide*, V, 12; V, 19; V, 16),

$$KA : AL = KZ : AZ = KZ : ZB.$$

Invertendo (*Euclide*, V, 7)

$$ZB : KZ = LA : AK.$$

Componendo (*Euclide*, V, 18)

$$BK : KZ = KL : KA.$$

Perciò si ha anche (*Euclide*, VI, 4)

$$DB : ZG = EL : CA.$$

Quindi (*Euclide*, VI, 16; I, 34)

$$DB \times AC = ZG \times EL = GZ \times ZM.$$

Ma sappiamo¹² che

¹¹ Apollonio utilizza in questo passaggio la proposizione 37 del Libro I delle *Coniche*, in cui è dimostrata la seguente proprietà: data un'ellisse (o un'iperbole), un suo diametro AB, una tangente in E alla curva che incontri in K il diametro e infine l'ordinata EL (in direzione coniugata al diametro), si ha $KZ \times ZL = ZA \times ZB$ (cfr. Fig. a).

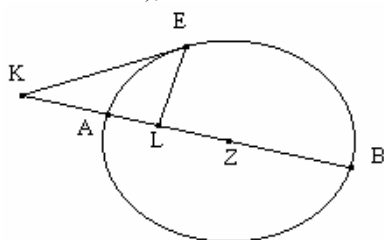


Fig. a

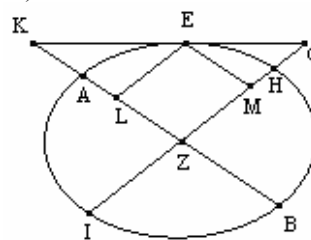


Fig. b

¹² Per concludere la sua dimostrazione, Apollonio si serve ora della prop. 38 (Libro I delle *Coniche*) (Cfr. Fig. b).

$$GZ \times ZM = ZH \times ZH$$

uguale cioè alla quarta parte della figura applicata ad AB. Si conclude che

$$DB \times AC = ZH \times ZH, \text{ c.v.d.}$$

Questa dimostrazione si adatta senza difficoltà al caso dell'iperbole, in quanto i teoremi richiamati nelle note 11 e 12 valgono in generale per le coniche a centro.

3. Coniche e polarità rispetto ad una circonferenza

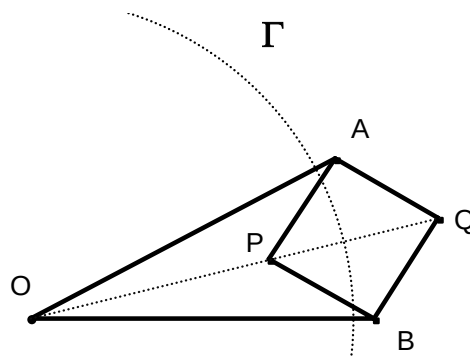


Fig. 17

La Fig. 17 rappresenta un inversore di Peaucellier. ($OA = OB = a$; $PA = PB = b$). Studiando questo strumento¹³, abbiamo già visto come ricavarne, con qualche semplice modifica, il *polarizzatore* illustrato nelle Fig. 18 e 19: meccanismo che, per ogni punto P del piano interno alla regione delimitata dalle circonferenze di raggi $a + b$ e $a - b$ (in esso infatti $AC = BD = PA = PB = b$), individua, mediante l'asta CD, la polare di P rispetto alla circonferenza base Γ (il cui raggio è $\sqrt{a^2 - b^2}$).

Data un'ellisse (o un'iperbole) di cui AB sia un diametro, Z il centro, HI il diametro coniugato (passante quindi per Z); data inoltre una tangente KEG alla curva (E punto di contatto, K e G punti di intersezione con i diametri); condotta infine per E la parallela ad AB fino ad incontrare GI nel punto M, risulta: $GZ \times MZ = ZH \times ZH = ZI \times ZI$. (In Figura EL è l'ordinata di E).

¹³ Pergola & Maschietto (2003).

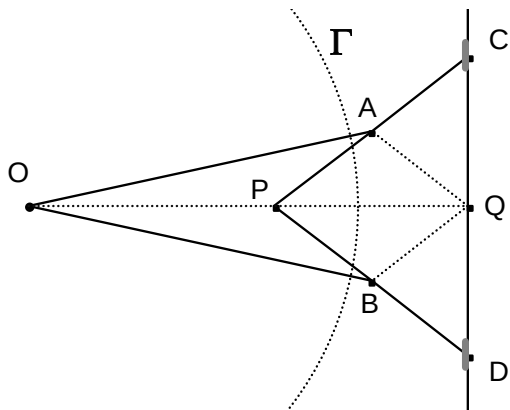


Fig. 18

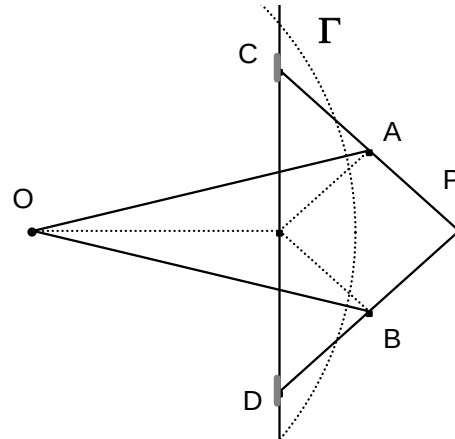


Fig. 19

Sia con sperimentazioni sul sistema fisico, sia con simulazioni in Cabri, si può verificare che:

- quando P si muove lungo una retta, la polare di P rispetto a Γ descrive un fascio avente come centro il polo della retta percorsa da P (Fig. 20).

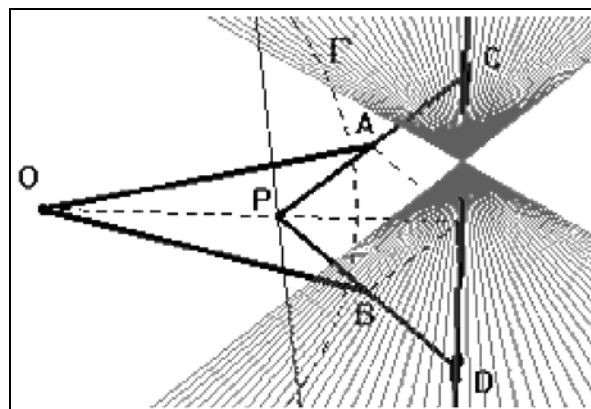


Fig. 20

- quando P si muove lungo una circonferenza K , la polare di P rispetto a Γ descrive invece una conica involuppo (non degenera). Un esempio si vede nella Fig. 21.

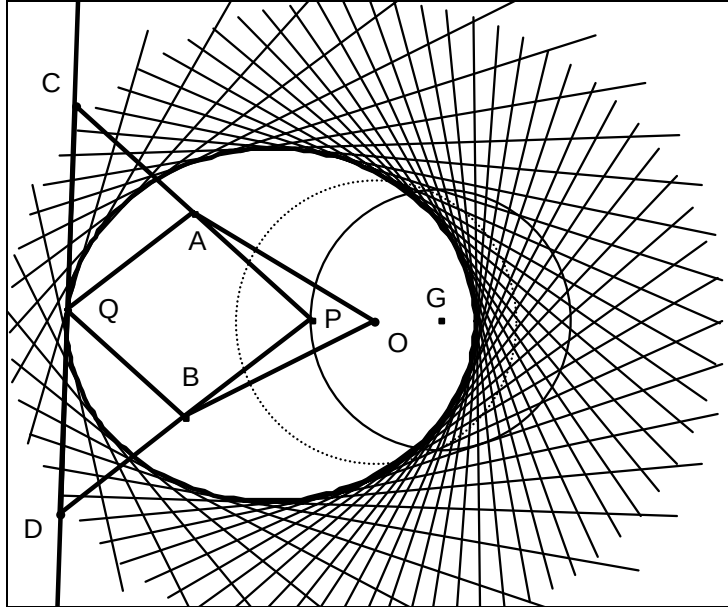


Fig. 21

Di quest'ultima proprietà¹⁴ daremo ora una dimostrazione analitica, che consentirà qualche precisazione.

Collochiamo nel piano π individuato dal polarizzatore un riferimento cartesiano ortogonale $O(x; y)$. Senza diminuzione di generalità possiamo assumere, per la circonferenza Γ , un raggio unitario; indichiamo inoltre con $G(h, k)$ il centro della circonferenza K e con r il suo raggio. Si ha allora:

- Equazione della circonferenza Γ : $x^2 + y^2 = 1$.
- Equazione della circonferenza K : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
- Punto generico P di K : $P(m; k \pm \sqrt{r^2 - (m - h)^2})$.
- Polare di P rispetto a Γ : $mx + (k \pm \sqrt{r^2 - (m - h)^2})y - 1 = 0$. (11)
- Coordinate plückeriane della polare di P :

$$u = -m, \quad v = -k \pm \sqrt{r^2 - (m - h)^2} \quad (12)$$

¹⁴ Si tratta di un caso particolare del teorema seguente:

Se un punto descrive una conica K , la polare di esso rispetto a una seconda conica Γ (direttrice) inviluppa una terza conica K' (conica polare di K) e le tangenti di K hanno come poli i punti di K' .

Eliminando il parametro m nelle (12) si ha l'equazione plückeriana dell'involuppo delle polari di P:

$$u^2 + v^2 + 2hu + 2kv + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad (13)$$

La (13) rappresenta una conica $\mathbf{S}$ il cui discriminante è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ h & k & h^2 + k^2 - r^2 \end{vmatrix}.$$

Utilizzando i complementi algebrici di tale discriminante ricaviamo subito, come è noto, l'equazione cartesiana della conica $\mathbf{S}$, cioè del luogo costituito dai punti di contatto delle rette (11). Risulta:

$$(h^2 - r^2)x^2 + hkxy - hx + (k^2 - r^2)y^2 - ky - hx - ky + 1 = 0,$$

ossia, con facili calcoli:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2} (hx + ky - 1)^2 \quad (14)$$

In Fig. 22 (ricavata dal caso particolare di Fig. 21) vediamo le circonferenze $\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$ e la conica luogo $\mathbf{S}$; abbiamo anche aggiunto la retta $\mathbf{d}$ ($hx + ky - 1 = 0$), polare di $G(h, k)$ rispetto a $\mathbf{I}$. Indicando con $R(x, y)$ un punto generico della conica $\mathbf{S}$, troviamo subito:

- distanza OR = $\sqrt{x^2 + y^2}$;
- distanza OG = $\sqrt{h^2 + k^2}$;
- distanza RD (tra R e la retta $\mathbf{d}$): $\frac{hx + ky - 1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$.

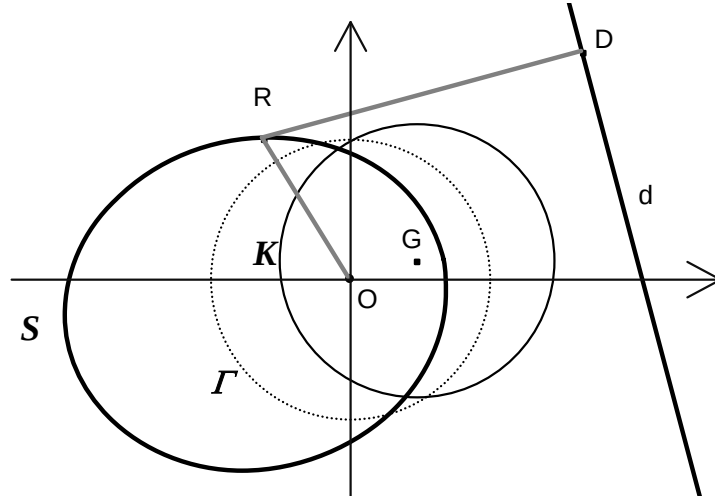


Fig. 22

Quindi:

$$\frac{OR^2}{RD^2} = \frac{(x^2 + y^2) \times (h^2 + k^2)}{(hx + ky - 1)^2}.$$

Ma poiché le coordinate di R soddisfano alla (14):

$$\frac{OR^2}{RD^2} = \frac{OG^2}{r^2}.$$

Il rapporto $\frac{OR}{RD}$ è dunque costante.

Possiamo concludere che la conica **S** ha come fuoco il punto O e come direttrice la retta **d**. Sarà una ellisse se $OG < r$ (cioè se O è interno alla circonferenza **K**, come accade in Fig. 21 e 22), una iperbole se $OG > r$ (e allora O è esterno alla circonferenza **K**), una parabola se O appartiene alla circonferenza **K** ($OG = r$).

Gli ultimi due casi sono rappresentati nelle simulazioni di Fig. 23 e 24.

Nei modelli fisici corrispondenti occorrerà introdurre un “ponte” VW al di sotto del quale possa muoversi il polarizzatore: un’asta imperniata in G (il perno è vincolato a VW) costringe il punto P (del quale viene fornita meccanicamente la polare rispetto a **I**) a percorrere la circonferenza **K**. Il “ponte” è rappresentato nelle Fig. 23 e 24.

Questi strumenti funzionano con buona scorrevolezza: si deve tuttavia osservare che (se nella costruzione non vengono usati opportuni accorgimenti) il posizionamento della polare non è molto preciso.

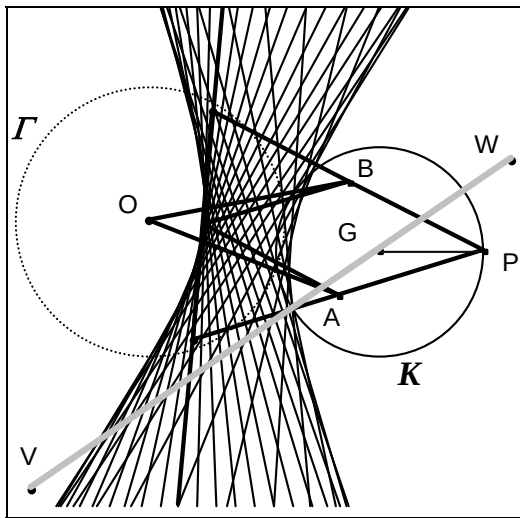


Fig. 23

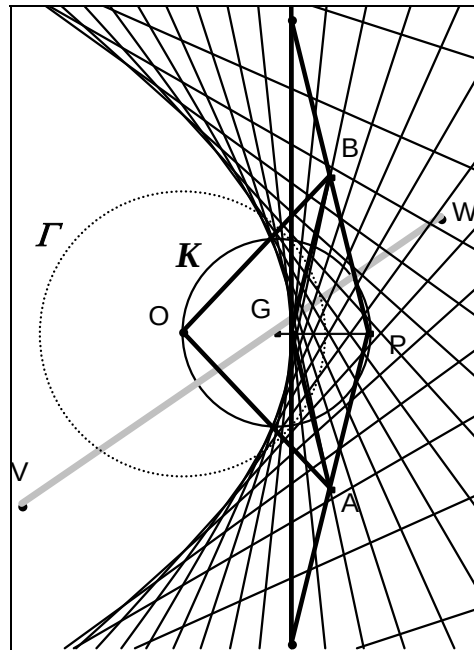


Fig. 24

4. Coniche come proiezioni di una circonferenza: genesi di una costruzione per punti (de La Hire)

A partire dal XV secolo si diffondono e acquistano sempre maggiore importanza le ricerche sulla rappresentazione del mondo reale: pittori e architetti elaborano (anche attraverso lo studio delle ombre) tecniche e strumenti per la costruzione di immagini prospettiche; astronomi, cartografi, ingegneri militari sviluppano nuovi metodi di rilevamento per mappare zone della superficie terrestre e della volta celeste o ricavare piante di fortificazioni. Su questo terreno ricco di stimoli i matematici esercitano la loro riflessione, con ricerche inizialmente rivolte soprattutto ai problemi posti da artisti e tecnici, poi sempre più autonome: fino alla scoperta di proprietà e alla formazione di costruzioni teoriche che saranno in seguito fondamentali per la nascita della

geometria proiettiva (ricordiamo qui in particolare alcuni autori: G. Del Monte, G. Desargues, B. Pascal, S. Stevin, Ph. de La Hire). Riprendiamo qui una parte del lavoro di de La Hire.

Osserviamo il meccanismo rappresentato nelle Fig. 25 e 26.

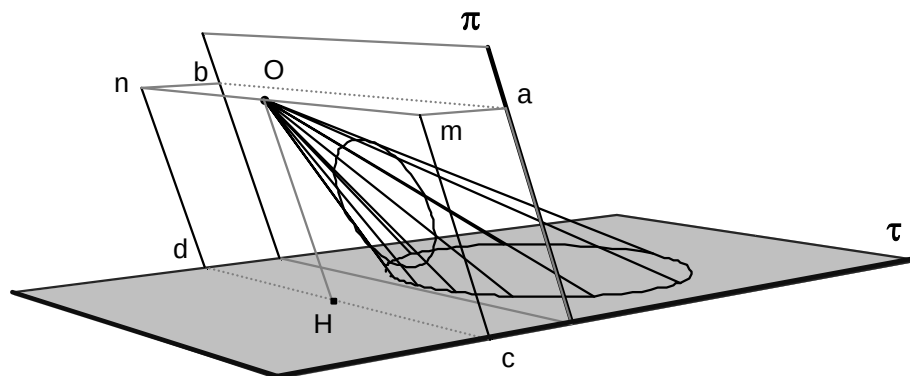


Fig. 25

Le lastre π (trasparente) e τ individuano due piani prospettivi incidenti: O è il centro della prospettiva, la retta d'intersezione fra i piani è luogo di punti uniti, le rette limite (**ab**, **cd**) sono tratteggiate in figura (quella su τ corrisponde alla retta impropria di π , quella su π corrisponde alla retta impropria di τ). Dal centro O escono fili (tenuti in tensione mediante pesetti di piombo legati, sotto il piano orizzontale τ , alle loro estremità libere) che raccordano i punti di una circonferenza, tracciata su π e *non intersecata dalla retta limite ab*, a quelli della curva corrispondente tracciata su τ . Punti collegati dal medesimo filo (punti omologhi) sono allineati con O .

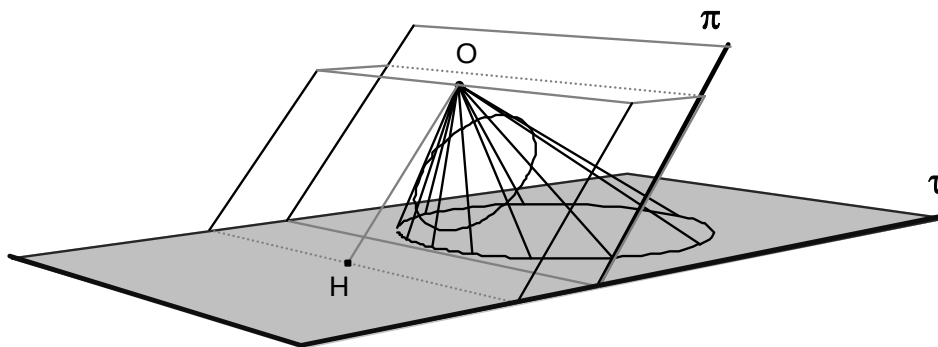


Fig. 26

Ognuna delle due curve è *proiezione* dell'altra. Si possono dare due interpretazioni alla situazione realizzata dal meccanismo considerato:

- la curva giacente su π (*quadro*) può essere considerata come immagine prospettica di quella giacente su τ (*piano di terra*);
- la curva giacente su τ può essere considerata come ombra di quella (*curva oggetto*) sostenuta da π .

Nella prima interpretazione, i fili rappresentano materialmente raggi visuali provenienti da τ e convergenti ad un *occhio* collocato in O; nella seconda interpretazione, i fili rappresentano invece raggi emessi da una *sorgente luminosa puntiforme* situata anch'essa in O.

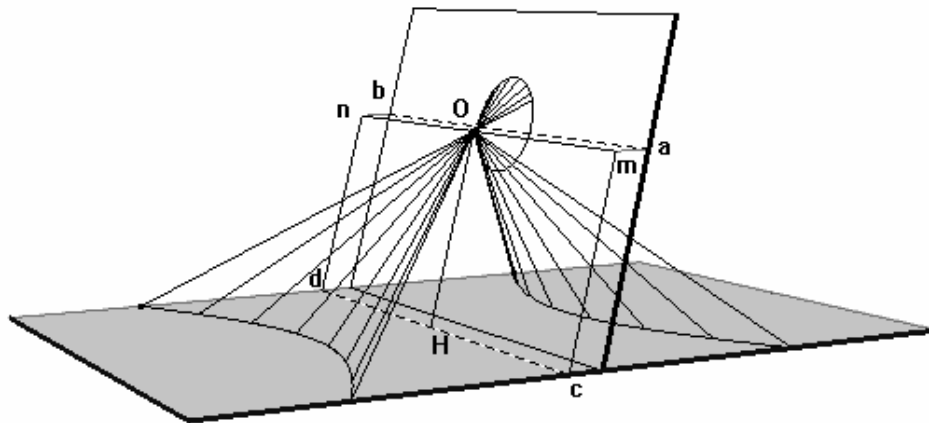


Fig. 27

Ma è possibile anche una terza interpretazione, che storicamente precede le altre due: in essa i fili tesi (eventualmente aumentati di numero per aiutare l'immaginazione) rappresentano le generatrici di un cono di vertice O, tagliato dai piani π e τ lungo due curve (*sezioni coniche*).

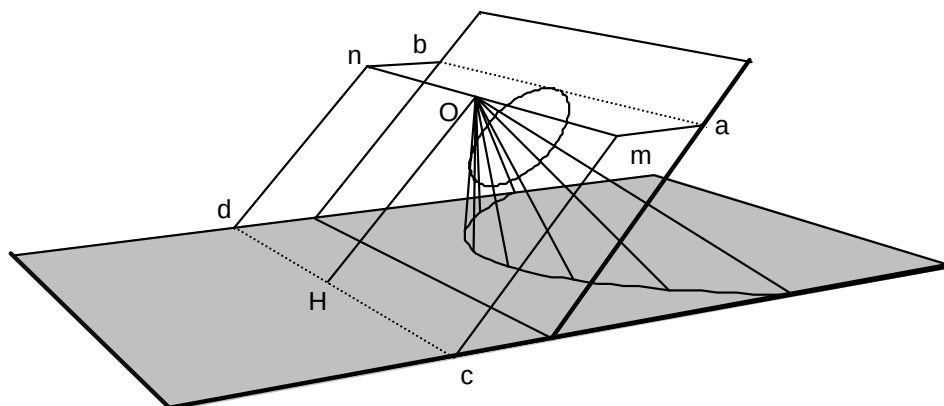


Fig. 28

Nel caso particolare di Fig. 25, la curva generata su τ (la sezione giacente su τ) è priva di punti impropri: come è noto, si tratta di un'ellisse. Se invece la circonferenza collocata su π interseca la retta limite **ab** oppure è a questa tangente, si hanno le configurazioni visibili nelle Fig. 27 e 28 (che schematizzano modelli fisici simili a quello di Fig. 25) dove le curve appartenenti al piano τ , rispettivamente *iperbole* e *parabola*, sono dotate di punti impropri corrispondenti, sulla circonferenza, a punti propri ben determinati (intersezioni tra la circonferenza stessa e la retta **ab**)¹⁵.

I modelli delle Fig. 25, 27, 28 sono costruiti in modo che la lastra π possa ruotare attorno alla retta luogo di punti uniti, trascinando nel suo movimento un parallelepipedo articolato costituito da 5 aste rigide opportunamente incernierate a π (nei punti a, b), a τ (nei punti c, d) e fra di loro (nei punti m, n). Il punto O, vincolato all'asta **mn**, è allora costretto a muoversi lungo una circonferenza di centro H e raggio OH (in ogni istante OH è parallelo a π).

¹⁵ Lo studio della prospettiva ha permesso ai matematici di considerare punti all'infinito e punti a distanza finita come oggetti strettamente analoghi, "disinfinitizzando" in qualche modo l'infinito. Da Desargues in poi, le coniche sono state così considerate come una sola ed unica curva, e non semplicemente come curve ottenibili l'una dall'altra con progressive deformazioni (Kepler). Sulla decisiva influenza che la geometria delle proiezioni ha avuto nell'elaborazione del concetto di infinito (e della sua utilizzazione teorica) cfr. Bkouche (1992).

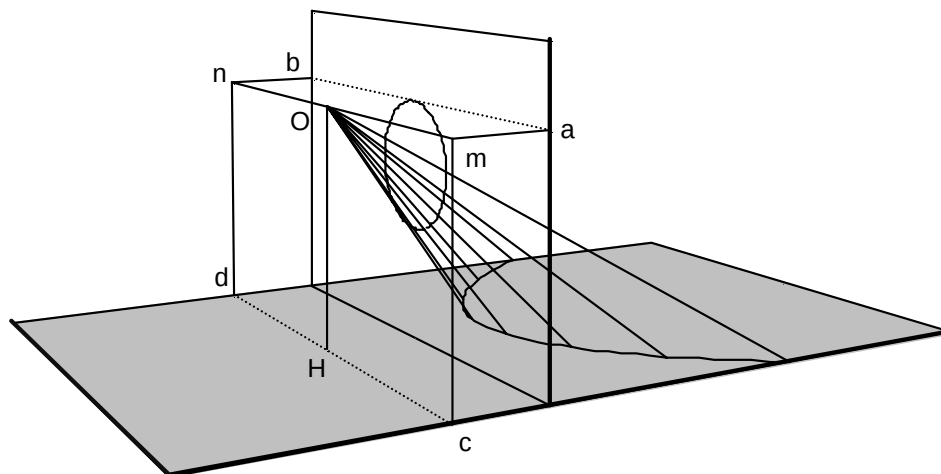


Fig. 29

Nelle simulazioni in Cabri le rotazioni di π ed O ci conducono con continuità, per esempio, dalle situazioni di Fig. 25 (o 28) a quella di Fig. 26 (o 29). È facile verificare empiricamente che, durante tali movimenti, due punti omologhi qualsiasi rimangono sempre allineati con O e le curve corrispondenti non cambiano, resta cioè invariata la prospettiva fra π e τ . Detto in altri termini: il movimento simultaneo dell'occhio e del quadro (oppure: della sorgente luminosa e dell'oggetto), regolato dal parallelepipedo articolato (movimento di Stevin)¹⁶ lascia invariata l'immagine prospettica (l'ombra).

¹⁶ Fu infatti S. Stevin (ingegnere militare di Maurizio di Nassau-Orange, governatore delle Fiandre) a scoprire (in parte attraverso la costruzione e l'uso empirico di prospettografi, in parte studiando il problema della restituzione prospettica), questa proprietà fondamentale nella teoria delle proiezioni centrali (*Teorema dell'invarianza della prospettiva nel ribaltamento*). Stevin si esprime così:

“Ruotati il vitreo attorno alla base del vitreo come asse e la linea dell'osservatore attorno al piede, in modo che la linea dell'osservatore resti sempre parallela alla retta del vitreo perpendicolare alla base del vitreo, l'immagine del punto da disegnare dato nel pavimento appare nel vitreo sempre al medesimo posto; similmente l'immagine del punto che emerge al disopra del pavimento se la retta dal punto al pavimento ruota anch'essa parallelamente”.

“Vitreo” significa quadro, “base del vitreo” è la linea di terra, “pavimento” è il piano di terra, e infine la “linea dell'osservatore” (perpendicolare al piano di terra) congiunge punto di vista e punto di stazione. Sinisgalli, R. (1978).

Immaginiamo di proseguire la rotazione fino alla completa sovrapposizione di π e τ (un esempio in Fig. 30). Le due curve, insieme ad O, ai fili convergenti in O, alla retta limite **ab**, alla retta luogo di punti uniti (parallele fra loro), giacciono così sul medesimo piano; quindi, non ha più senso dire che una di esse è proiezione (ombra o prospettiva) dell'altra.

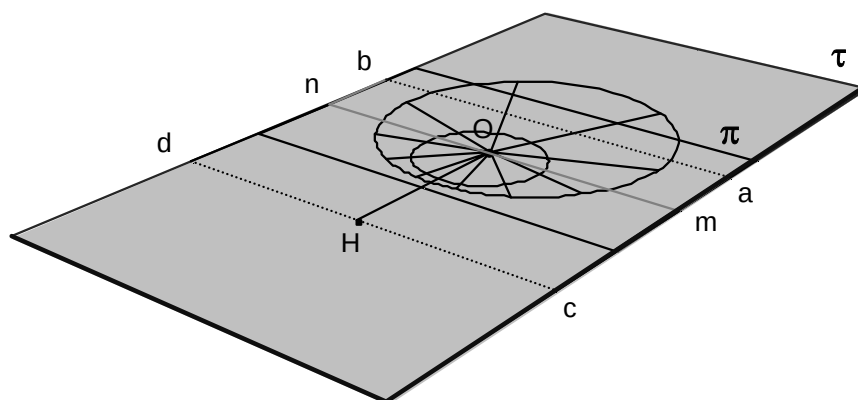


Fig. 30

Ma de La Hire ha dimostrato¹⁷ che dai punti della circonferenza, assunta come curva di partenza, si possono in tal caso ottenere quelli della seconda curva (una conica) mediante operazioni eseguibili con riga e compasso *totalmente interne al piano in cui giace la circonferenza stessa*. Le coniche appaiono allora come *trasformate* della circonferenza. Si noti bene che *solo i punti della circonferenza vengono trasformati*. Il concetto generale di trasformazione del piano in sé si forma molto più tardi: non è rintracciabile nell'opera di de La Hire, anche se possiamo utilizzare le operazioni da lui descritte per costruire punti corrispondenti in una *omologia*.

Ecco una breve ricostruzione del metodo di de La Hire.

¹⁷ de La Hire (1673).

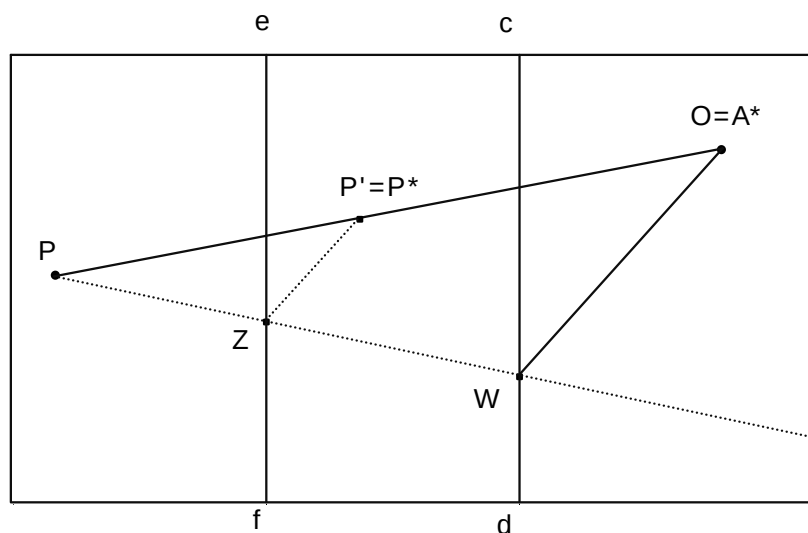


Fig. 32

Quando P percorre una circonferenza, i punti P' *formano* una conica. Si noti che se P appartiene alla formatrice corrisponde a se stesso (coincide infatti con Z), mentre se appartiene alla direttrice il *formato* corrispondente è improprio (infatti P coincide con W e quindi le rette A^*W e PA^* sono parallele).

Utilizzando il metodo di de La Hire è semplice ricavare le equazioni della trasformazione che, applicata ai punti di una circonferenza, genera una conica. Si scelga come asse delle ascisse, sui piani sovrapposti τ e π , la retta luogo di punti uniti, e come asse delle ordinate (il sistema di riferimento è ortonormale) la perpendicolare passante per A^* (Fig. 33); la retta limite avrà allora equazione $y = k$, il punto A^* coordinate $(0, q)$. Sia $P(a, b)$ il punto da trasformare.

La retta passante per P e per l'origine Z del riferimento ha equazione $bx - ay = 0$; intersecandola con $y = k$ si ottiene il punto $W(\frac{ak}{b}, k)$.

Il coefficiente angolare della retta A^*W risulta $m = -\frac{(q-k)b}{ak}$.

Determiniamo il punto di incontro fra la retta parallela ad A^*W passante per l'origine Z e la retta PA^* : dopo alcuni passaggi (eseguendo le sostituzioni $a = x, b = y, x = x', y = y', q - k = h$) si ottiene infine:

$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{k-y} \\ y' = \frac{-hy}{k-y} \end{cases}$$

che noi siamo abituati a leggere come *equazioni canoniche della omologia*.

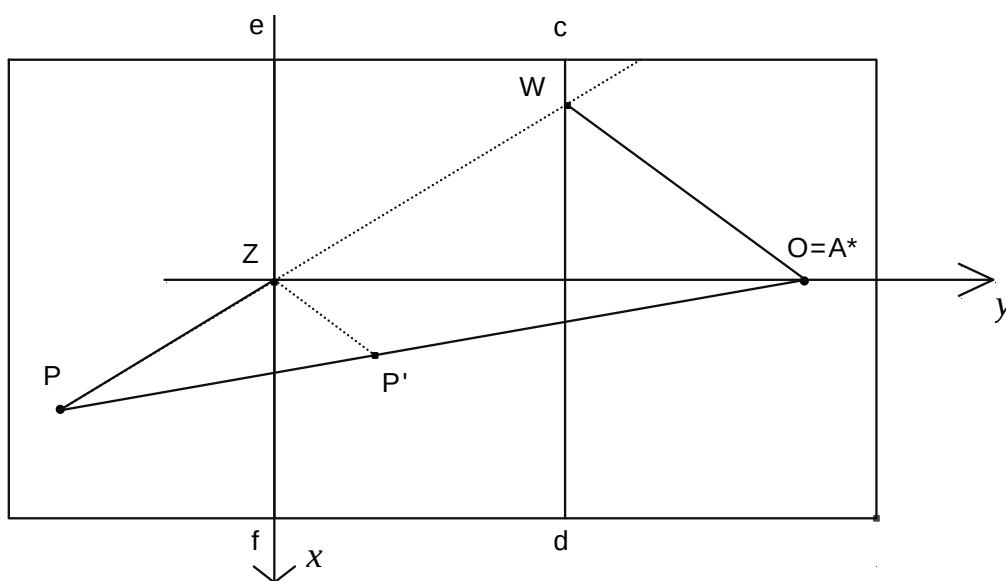


Fig. 33

Bibliografia

- Apollonio, “*Coniche*”, ed. Heiberg.
- Bartolini Bussi M. G., Maschietto M., 2005, “*Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*”, Milano, Springer.
- Bkouche R., 1992, “*Le projectif ou la fin de l’infini*”, Actes du 9ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Brest, IREM, pp. 473-517.
- Enriques F. (1996), “*Lezioni di Geometria Proiettiva*”, Bologna, Zanichelli (ristampa ed. 1904).
- de La Hire P., 1673, “*Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*”, Paris.
- Pergola M., Maschietto M., 2003, “*Biellismi del Peaucellier e del Delaunay*”, Progetto Alice, n° 11, Vol. IV, 363 – 382.
- Pergola M., Maschietto M., 2004, “*Angoli in movimento*”, Progetto Alice, n° 13, Vol. V, 153 – 174.
- Sinigalli R., 1978, “*Il contributo di S. Stevin allo sviluppo scientifico della prospettiva artificiale*”, Roma, L’Erma.

Marcello Pergola
Michela Maschietto