

Pergola, M. & Maschietto, M. (2005), 'Sul problema dell'inserimento di medie proporzionali tra grandezze assegnate: soluzioni meccaniche', *Progetto Alice*, vol. VI, n° 16 – I, 87-107.

Sul problema dell'inserimento di medie proporzionali tra grandezze assegnate: soluzioni meccaniche*

Marcello Pergola
Michela Maschietto

Riassunto Si illustrano alcuni metodi meccanici antichi (Grecia classica) e moderni (XVII e XVIII secolo) per risolvere il problema dell'inserzione di medie proporzionali, legato storicamente alla duplicazione del cubo e alla risoluzione delle equazioni di terzo grado. Il meccanismo proposto a tale scopo da Guido Grandi appartiene a una serie di curvigraphi a filo (interessante la simulazione in Cabri) presentati nell'ultimo paragrafo.

Abstract This paper presents some mechanical methods for solving the problem of insertion of proportional means, which is related to the question of cube duplication and to resolution of third degree equations. In particular, Guido Grandi's mechanism is analysed. It belongs to a class of geometrical devices for drawing curves with the use of threads. These are described in the last paragraph with the support of the software Cabri.

Marcello Pergola
pernon@aliceposta.it

Michela Maschietto
maschietto.michela@unimore.it

* Lavoro eseguito nell'ambito del progetto PRIN_COFIN03 n.2003011072

1. Il mesolabio di Eratostene

“Narrano che uno degli antichi poeti tragici” – così inizia una lettera, oggi famosa, inviata da Eratostene a Tolomeo III ⁽¹⁾ – “facesse apparire sulla scena Mino (re di Creta) nell’atto di far costruire una tomba al figlio Glauco; e che Mino, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato soltanto cento piedi, dicesse: ‘troppo piccolo spazio accordasti a un sepolcro di re; raddoppialo, conservandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro’. Ora è chiaro che egli si ingannava. Infatti, duplicandone i lati, una figura piana si quadruplica, mentre una solida si ottuplica. Allora anche fra i geometri fu agitata la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque, conservandone la specie. E questo problema fu chiamato duplicazione del cubo, o anche problema di Delo, perché in seguito anche i Delii, spinti dall’oracolo a duplicare un altare cubico, caddero nella medesima difficoltà”.

I geometri rimasero per lungo tempo imbarazzati. Noi sappiamo ora che la soluzione del problema è legata a quella di una equazione irriducibile di terzo grado, ed è dunque inaffrontabile con gli unici strumenti di calcolo, riga e compasso, allora universalmente accettati. Occorreva inventarne di nuovi.

“Ippocrate da Chio” – prosegue Eratostene (e la sua testimonianza fu confermata in seguito da Proclo) – “trovò per primo che se fra due linee rette ⁽²⁾ delle quali la maggiore sia doppia della minore si inseriscono due medie in proporzione continua, il cubo sarà duplicato”.

Infatti (usiamo per comodità notazioni moderne, indicando i segmenti con lettere) dalle uguaglianze $a : x = x : y = y : b$ si ottiene, applicando le proprietà delle proporzioni, $a^3 : x^3 = a : b$; nell’ipotesi $a = 2b$ si ha quindi $a^3 : x^3 = 2$. Eratostene osserva che *“in questo modo una difficoltà è trasformata in un’altra non minore”*, ma tuttavia riesce a risolvere il problema di Delo soltanto realizzando (con un procedimento meccanico) l’inserzione proposta da Ippocrate, la cui idea si rivela dunque feconda.

⁽¹⁾ Cfr. per es. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutoci*, ed. Heiberg, 1881 – 1915, vol. III.

⁽²⁾ Ricordiamo che nella geometria classica il termine *retta* ha il medesimo significato del nostro *segmento*.

Lo strumento inventato da Eratostene (che Proclo chiamerà *mesolabio* e si può costruire in molti modi diversi) è costituito da tre rettangoli uguali (di legno, metallo o altri materiali) disposti fra due regoli paralleli r ed s sorretti da una intelaiatura e scanalati in modo tale che i rettangoli possano scorrere uno sull'altro. La situazione iniziale è schematizzata in Fig. 1. Il rettangolo 2 (mediano) rimane immobile, mentre il rettangolo 1 (muovendosi verso destra) si sovrappone a 2, e il rettangolo 3 (scorrendo verso sinistra) gli scivola sotto.

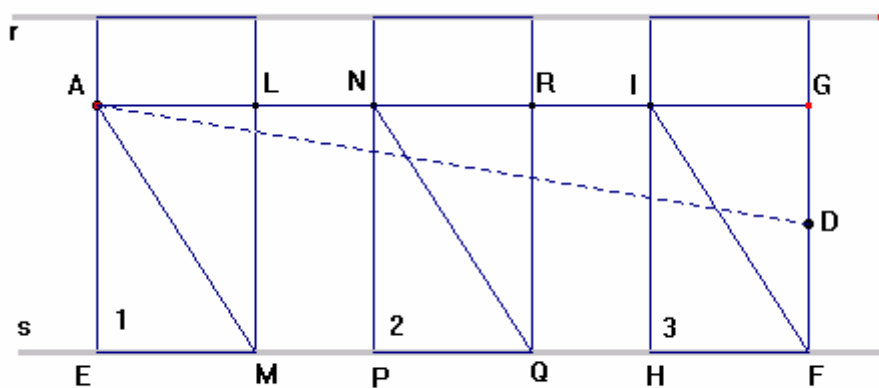


Fig. 1

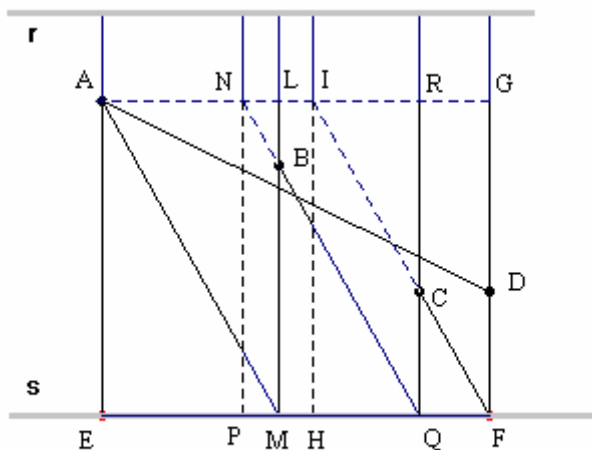


Fig. 2

I segmenti assegnati a e b si riportano rispettivamente sul lato sinistro del rettangolo 1 (a partire dal vertice E della base EM) e sul lato destro del rettangolo 3 (a partire dal vertice F della base HF), sicché risulta $a = AE$, $b = DF$; si traccia infine da A una parallela ai regoli r ed s , che individua i nuovi rettangoli $AEMN$, $NPQR$, $IHFG$ di cui si considerano le

diagonali: **AM**, **NQ**, **IF** rispettivamente (fra loro parallele). Un filo congiunge i punti **A** e **D** (per tenerlo teso, è possibile ad esempio utilizzare la forza di gravità).

L'operatore muove i tre rettangoli sovrapponendoli parzialmente; concentra la sua attenzione sui punti **B** (intersezione di **LM** con **NQ**) e **C** (intersezione di **IF** con **RQ**) (cfr. Fig. 2) e cerca di allinearli con **A** e **D** (di portarli cioè sulla retta individuata dal filo teso). Raggiunto lo scopo (Fig. 3) il problema è risolto.

Lo si dimostra subito prolungando **AD** fino ad incontrare **EF** in **K**. Dalle coppie di triangoli simili **AEK**, **BMK** e **AMK**, **BQK** si ottiene:

EK : MK = AK : BK = MK : QK . Ma risulta anche:

EK : MK = AE : BM ;

inoltre

MK : QK = BM : CQ .

Quindi:

AE : BM = BM : CQ .

In modo analogo, dalle coppie di triangoli simili **BMK** e **CQK** e **BQK**, **CFK** si deduce:

BM : CQ = CQ : DF .

Pertanto **AE**, **BM**, **CQ**, **DF** sono in proporzione continua, e **BM**, **CQ** i medi proporzionali cercati ⁽³⁾.

Il disegno della Fig. 4 rappresenta una realizzazione concreta del mesolabio di

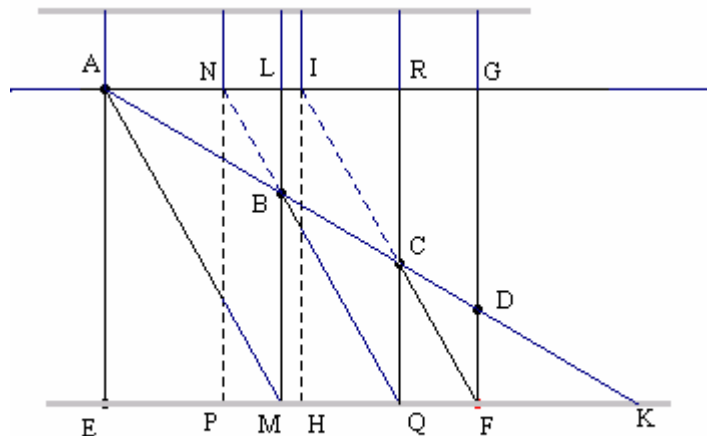


Fig. 3

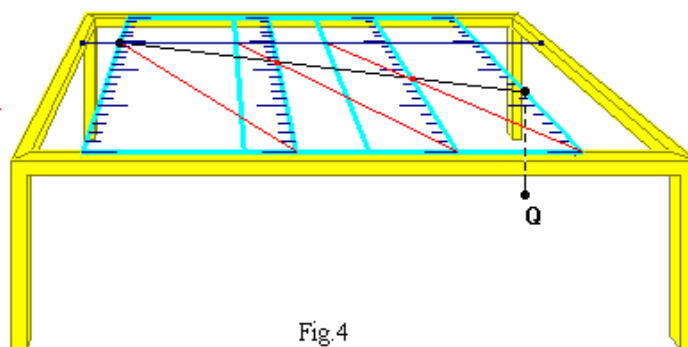


Fig. 4

⁽³⁾ Si noti che l'allineamento dei punti **A**, **B**, **C**, **D** è valutato "a occhio"; ulteriori incertezze sono dovute alle inevitabili imperfezioni dello strumento.

Eratostene. Si noti a destra il peso **Q** che mantiene in tensione il filo **AD**.

2. Il rettangolo di Platone – Dürer

L'inserzione di due medi proporzionali fra due segmenti assegnati (di lunghezza diversa) è stata realizzata dai geometri della antica Grecia anche con un altro strumento, più antico del mesolabio (Eutocio ne attribuisce la scoperta a Platone, vissuto prima di Eratostene). Abbiamo scelto di illustrare qui la versione descritta da A. Dürer, che utilizza fonti medievali, nel libro IV del suo trattato di Geometria pratica ⁽⁴⁾.

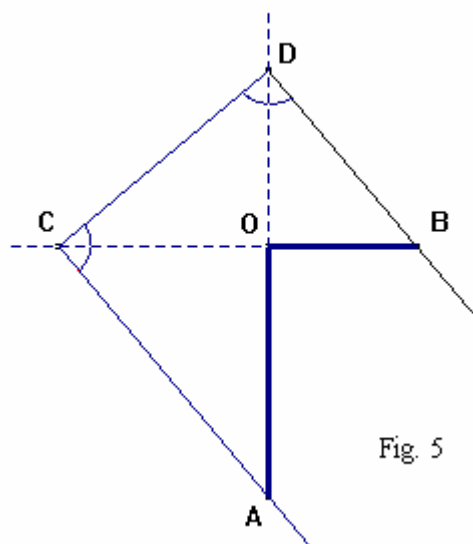


Fig. 5

Siano **a** e **b** i segmenti dati: disponiamoli in modo che abbiano un estremo in comune e siano fra loro perpendicolari (cfr. Fig. 5, dove **OA = a**, **OB = b**). Se riusciamo a collocare, nel piano individuato dai segmenti, due angoli retti (di vertici **C** e **D**) in modo che il vertice **D** si trovi sul prolungamento di **OA** (dalla parte opposta rispetto ad **A**), il vertice **C** sul prolungamento di **OB** (dalla parte opposta rispetto a **B**), il lato **CD** sia comune ai due

angoli, e infine gli altri due lati passino uno per **A**, l'altro per **B**. Dai triangoli rettangoli **ACD** e **CDB**, applicando un noto teorema euclideo, abbiamo subito **OA : OC = OC : OD = OD : OB**, cioè **a : OC = OC : OD = OD : b**. Quindi **OC** e **OD** sono i medi proporzionali richiesti.

Per mettere gli angoli retti di vertici **C** e **D** nella posizione indicata, è indispensabile un ausilio meccanico (*rettangolo di Platone*) che A. Dürer consiglia di costruire così:

*“Prendi una squadra come **RPQ**, avente l'angolo retto in **P**. Incidi una scanalatura lungo uno dei suoi lati, per esempio **PQ**, e introduci nella scanalatura una riga **ST** che formi costantemente un angolo retto con il lato*

⁽⁴⁾ Cfr. A. Dürer, *Géométrie*, a cura di J. Peiffer, Paris, Editions du Seuil, 1995, libro IV, pag. 327 – 334.

PQ della squadra (cfr. Fig. 6). Anche quando **ST** scorre verso l'alto o verso il basso, deve restare rigorosamente parallela al lato **PR** della squadra. Terminati questi preparativi, e collocati i segmenti **a** e **b** come si è detto (cfr. Fig. 7) disponi il lato **PR** della squadra in modo che il suo bordo interno passi per **A**, che il vertice dell'angolo retto appartenga alla retta **OB** e che l'altro lato **PQ** della squadra intersechi la retta **AO**.

Muovi ora la riga **ST** e fa in modo che il vertice **S** dell'angolo retto appartenga alla retta **AO** e che il bordo interno della riga passi per **B**".

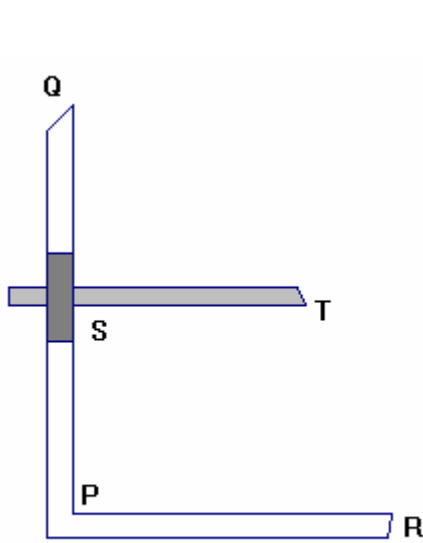


Fig. 6

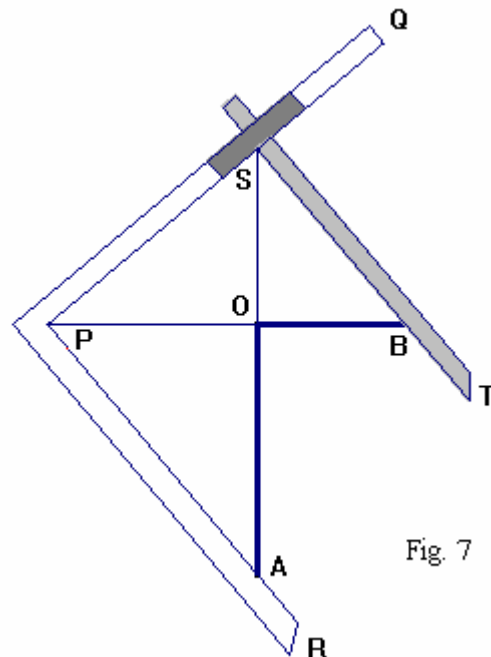


Fig. 7

I gradi di libertà dello strumento sono sufficienti ad assicurare, dopo qualche tentativo, il successo dell'operazione.

3. Il compasso proporzionale di Descartes

Agli inizi del XVII secolo il problema dell'inserzione di medi proporzionali tra due termini dati era ancora di grande attualità, in quanto strettamente legato alla risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo.

Proprio riflettendo sulla soluzione delle equazioni, sulla duplicazione del cubo e sugli altri problemi classici non risolubili con riga e compasso ⁽⁵⁾, Descartes scoprì un nuovo strumento meccanico che avrà poi funzioni teoriche di primo piano nella sua *Geometria*: negli scritti giovanili del 1619 lo presenta come “compasso mesolabio”, riprendendo il termine coniato da Proclo ⁽⁶⁾.

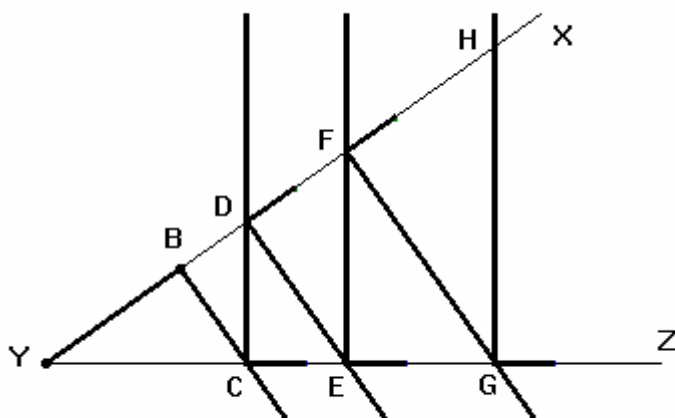


Fig. 8

Si tratta di un compasso (Fig. 8) costituito (come ogni altro) da due aste **YZ** e **YX**, incernierate in **Y**; ma qui all'asta **YX** ne è fissata in **B** un'altra, **BC**, in modo che **YBC** sia un angolo retto. Quando il compasso viene aperto, l'asta **BC** spinge in avanti (lungo il bordo interno del

braccio **YZ**) un cursore che sorregge l'asta **CD** mantenendola, durante il movimento, perpendicolare a **YZ**. A sua volta, l'asta **CD** spinge in avanti (lungo il bordo interno del braccio **YX**) un secondo cursore che sorregge un'altra asta **DE** mantenendola, durante il movimento, perpendicolare a **YX** (quindi, parallela a **BC**). E così via, come appare chiaramente dalla figura. In questo modo il movimento dell'asta **YX** si trasmette a tutte le altre, e il moto di ogni asta determina quello dell'asta successiva.

Si osservi che:

- i triangoli **CYB**, **DYC**, **EYD**, **FYE** ecc. sono simili e rettangoli qualunque sia l'apertura del compasso, perciò abbiamo la seguente

⁽⁵⁾ Particolarmente importanti per lo sviluppo delle idee di Descartes furono i metodi elaborati da Menecmo per risolvere il problema dei medi proporzionali (non erano di natura meccanica, ma basati sulla intersezione tra una parabola e un'iperbole, o tra due parabole: curve che Menecmo suppone di poter tracciare con la necessaria precisione).

⁽⁶⁾ Cfr. “*Cogitationes Privatae*”, in *Oeuvres de Descartes*, ed. Adam – Tannery, vol. X, pag. 238 – 239.

serie di proporzioni geometriche continue:

$$YB : YC = YC : YD = YD : YE = YE : YF \dots \text{ecc.}$$

Quindi questo compasso, appena aperto, genera non solo due, ma un numero qualsiasi di medi proporzionali fra due segmenti assegnati ⁽⁷⁾.

- se si posizionano dei tracciatori nei punti **B**, **D**, **F**, **H** ecc., il movimento del compasso genera una serie di curve (Fig. 9), chiamate da Descartes “lineae circini mesolabi”, aventi equazioni di complessità crescente, a partire dalla circonferenza di centro **Y** tracciata da **B** ⁽⁸⁾.

Negli scritti del 1619 Descartes si è soprattutto interessato al primo dei due fatti enunciati, mentre si è occupato del secondo in modo approfondito nella *Geometria* del 1637, dove all’inizio del libro III (si veda ancora la Fig. 9) afferma:

“Per trovare tante medie proporzionali quante ne vogliamo

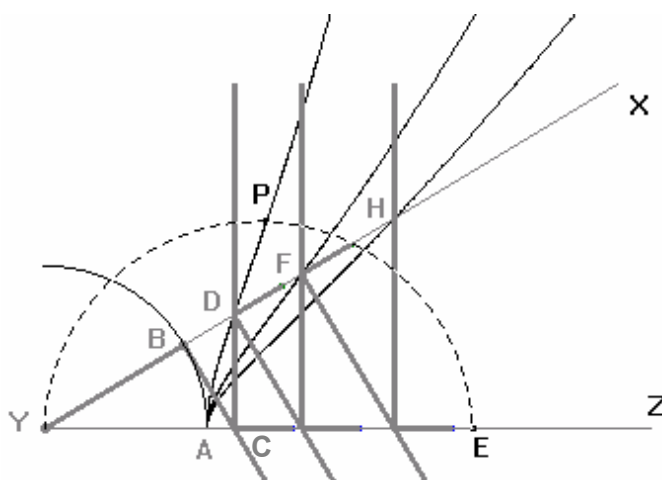


Fig. 9

⁽⁷⁾ Notiamo in modo esplicito, anche se è evidente, che la lunghezza di ognuno dei segmenti di tale serie è determinata, per ogni apertura del compasso, dalla lunghezza del primo: cioè dalla distanza tra il punto fisso **B** e la cerniera **Y**. Quindi primo e ultimo segmento della serie possono essere scelti in modo arbitrario.

Anche Eratostene osserva (nella citata lettera a Tolomeo) che il suo mesolabio si può adattare all’inserzione di quante si vogliano medie proporzionali; lo strumento di Cartesio è tuttavia molto più interessante perché non utilizza movimenti indipendenti, ma concatenati: in esso infatti “*i movimenti delle varie parti si susseguono l’un l’altro, e i seguenti sono interamente determinati dai precedenti*”.

⁽⁸⁾ Determiniamo per esempio l’equazione della curva descritta da **D** (il riferimento ortonormale abbia origine in **Y**, asse delle **x** coincidente con **YC**). Poniamo $YA=YB=a$, $YC=x$, $CD=y$, $YD=z$. Dai triangoli simili **YBC** e **YCD** si ricava: $za = x^2$, dal triangolo rettangolo **YCD** si ottiene invece: $z^2 = x^2 + y^2$; quindi la curva ha equazione $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

non credo vi sia modo più facile e la cui dimostrazione sia più evidente di quello d'usare le curve che si descrivono con lo strumento XYZ sopra spiegato. Infatti, se si cercano tra YA e YE due medie proporzionali” (e se – aggiungiamo noi – la curva AD generata dal tracciatore D è già disegnata sul foglio) “occorre soltanto descrivere un cerchio di diametro YE : dato che questo cerchio taglia la curva AD in un punto P , YP è una delle medie proporzionali ricercate. La dimostrazione è intuitiva, basta disporre l'asta YX sulla retta YP ”. In altri termini, si fa coincidere D e P (Fig. 9).

Il compasso proporzionale di Descartes è di difficile realizzazione: se non si usano particolari dispositivi ingegneristici (inaccessibili a un costruttore artigianale), il movimento diventa difficile a causa degli attriti, e molto impreciso. Funziona invece benissimo la simulazione in Cabri, ed è del resto probabile che lo strumento virtuale corrisponda meglio di quello concreto alle modalità di utilizzazione a cui Descartes pensava (per immedesimarci con lui cerchiamo di sostituire la mente al computer, l'immaginazione alla vista, carta e penna al monitor). Non c'è infatti nulla

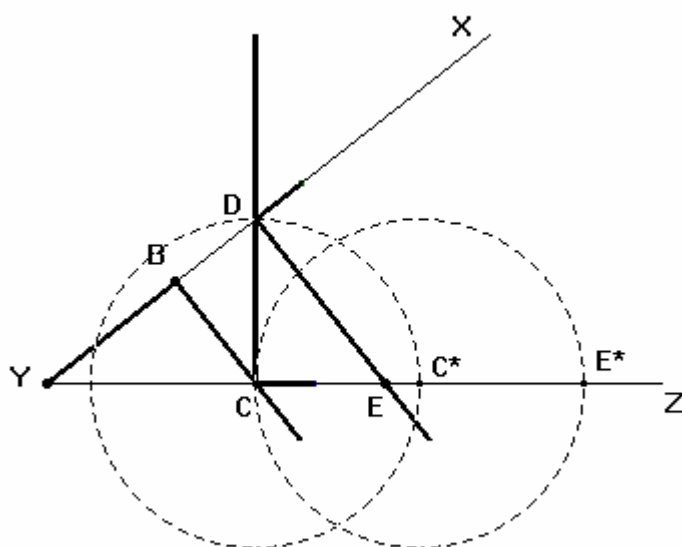


Fig. 10

nella *Geometria* cartesiana che induca a ritenere indispensabile un impiego fisico del nuovo strumento.

Tuttavia, arrestandosi ai primi due stadi (Fig. 10), il compasso cartesiano si può aprire e chiudere con scorrevolezza anche se costruito con materiali poveri e tecnologie elementari; può essere quindi molto utile nella attività didattica per mostrare

come Descartes (fin dagli anni giovanili) risolveva con il suo aiuto alcune equazioni di terzo grado. Ecco un esempio tratto dalle “*Cogitationes privatae*”.

Data l'equazione $x^3 = x + 2$ (ricordiamo che i matematici del XVII secolo escludevano tutti i casi in cui non esisteva alcuna radice positiva),

poniamo (cfr. sempre Fig. 10) $YB = 1$ (nel modello fisico si potrà scegliere arbitrariamente unità di misura: per es. 10 cm), $YC = x$. Dalla proporzione $YB : YC = YC : YD$ cioè $1 : x = x : YD$, si ottiene $YD = x^2$; essendo poi $YC : YD = YD : YE$ cioè $x : x^2 = x^2 : YE$, risulta anche $YE = x^3$.

Esplorando lo strumento vediamo subito che $CE = YE - YC = x^3 - x$. Apriamo ora (o chiudiamo) il compasso: la lunghezza di CE varia. Blocchiamo la cerniera nel momento in cui $CE = 2YB$ (per es. 20 cm se si era scelto come unitario un segmento di cm 10). Prima di azionare il meccanismo è opportuno segnare sull'asta YZ il punto E^* a cui E dovrà sovrapporsi (per es. tracciando le due circonferenze di raggio YB e centri in C e in C^* visibili nella figura). Quando $CE = 2YB$ il segmento $x = YC$ ci darà il valore dell'incognita (se interessano i numeri, e se abbiamo scelto $AB = 10$, dovremo dividere per 10 la sua lunghezza). Sullo strumento da noi costruito abbiamo ottenuto senza difficoltà: $1,52 < x < 1,53$.

Si deve sottolineare che in questo procedimento un segmento può rappresentare indifferentemente sia x che le sue potenze (mentre, secondo la tradizione, x^2 dovrebbe essere un'area, x^3 un volume). Descartes considera l'insieme dei segmenti come chiuso rispetto alle operazioni algebriche. Il principio di omogeneità dimensionale (dominante, a parte qualche eccezione, nei secoli precedenti) è ormai ideologicamente superato⁽⁹⁾.

4. Il mesolabio di Guido Grandi

Ogni problema che i matematici hanno ritenuto importante ha una storia che si prolunga nel tempo. In appendice al trattato sulle rodonee del 1728⁽¹⁰⁾, Guido Grandi inserisce un opuscolo intitolato "Constructio novi expeditissimi Mesolabi", nel quale ci offre un metodo per la ricerca dei medi proporzionali da aggiungere come contributo personale alle altre soluzioni di un problema "così desiderato e necessario". Il suo mesolabio è facile da realizzare e fornisce rapide risposte.

Con i segmenti assegnati DE , DN (dice G. Grandi) costruiamo (Fig. 11) il rettangolo $NDEF$ e la circonferenza circoscritta DKF . Fissiamo il disegno così ottenuto in un piano verticale in modo che il minore fra i due segmenti

⁽⁹⁾ Cfr. P. Freguglia, "Sul principio di omogeneità dimensionale tra Cinquecento e Seicento", *Bollettino UMI*, (8) 2-B, 1999, pag. 143-160.

⁽¹⁰⁾ Cfr. D. Guido Grandus, *Flores geometrici ex Rhodonearum et Cloeliarum curvarum descriptiones resultantes*, appendix pag. 77 – 82, Firenze 1728.

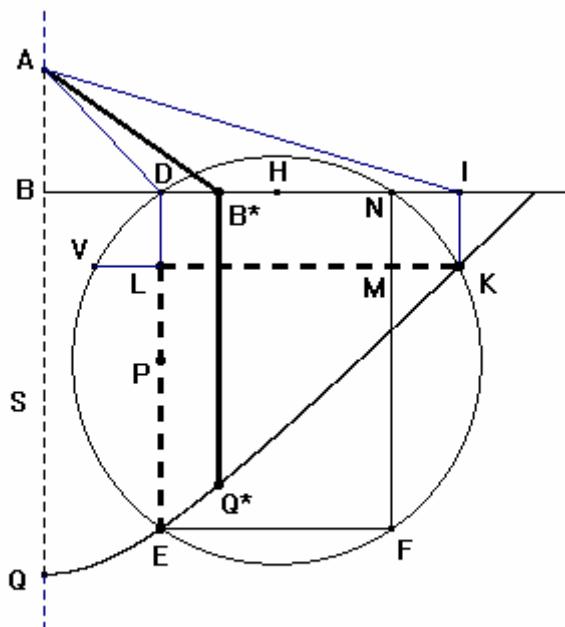


Fig. 11

accorgimenti meccanici su cui sorvoliamo), si fissi un perno in **A** e vi si attacchi uno degli estremi d'un filo di lunghezza $AQ = AD + DE$, tenuto in tensione da un piombo saldato nell'altro estremo **Q**. Con un cursore **B*** che scivola lungo la retta **BN**, si spinga il filo verso **N** (sarà più sicuro praticare nel cursore un foro attraverso cui il filo possa scorrere). L'estremo **Q*** del filo (tenuto teso dal piombo) si mette allora in movimento: innalzandosi, attraversa la circonferenza prima in **E** (punto di ingresso nell'area circolare) e poi in **K** (punto di uscita). Dopo aver segnato **K** sulla circonferenza, si tracci il segmento **KL** parallelo a **DN** (**L** si trova su **DE**). I segmenti **KL**, **EL** sono i medi proporzionali richiesti tra quelli inizialmente dati **ED**, **DN**.

La dimostrazione di G. Grandi, che ora riportiamo, non è difficile da seguire, ma richiede numerosi e faticosi passaggi. Cominciamo con l'osservare che è $AI + IK = AD + DE$ (il filo ha lunghezza fissa $AQ = AD + DE$). Togliendo ad entrambi i membri le parti uguali **IK**, **DL** si ricava: $AI = AD + LE$. Quindi: $AI^2 = AD^2 + LE^2 + 2AD * LE$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo **ABI** si ottiene:

$$AI^2 = (BD + DI)^2 + AB^2 = AD^2 + DI^2 + 2BD * DI.$$

Confrontando le due espressioni di AI^2 si ricava:

(per es. **DN**) sia orizzontale, e quindi l'altro (per es. **DE**) verticale. Prolunghiamo **DN** (dal lato opposto rispetto a **N**) fino a **B**, in modo che $BD = DH = \frac{1}{2} DN$.

Tracciamo **BS**, perpendicolare in **B** a **BN**. Puntando il compasso in **D**, con apertura uguale alla metà di **DE**, individuiamo su **BS** il punto **A** (al di sopra di **B**) e su **DE** il punto **P**. Risulta perciò $AD = DP = \frac{1}{2} DE$. Terminata

questa preparazione (che può essere agevolata da alcuni

$DI^2 + 2BD * DI = LE^2 + 2AD * LE$,
 cioè $DI^2 + DN * DI = LE^2 + DE * LE$ (§).
 Dato che $DI^2 = ID * DN + DI * IN$ e inoltre (controllare su Fig. 11)
 $DI = LK$, $DN = LM$, $MK = VL$, $DE = DL + LE$,
 l'espressione (§) si può scrivere come segue:

$$2KL * LM + VL * LK = 2LE^2 + DL * LE.$$

Ma $VL.LK = DL.LE$ (Euclide, Libro III, prop. 35). Perciò:

$$LE^2 = KL * LM = KL * DN (§§), \text{ da cui: } LK : LE = LE : DN (§§§).$$

Tenendo conto della (§§), e del fatto che $LK * KM = VL * LK = DL * LE$ ricaviamo $LE^2 + DL * LE = KL * LM + LK * KM = LK^2$.

Quindi, poiché $LE^2 + DL * LE = LE * (LE + DL) = LE * DE$

si conclude che: $LK^2 = LE * DE$, cioè $DE : LK = LK : LE$.

Così, confrontando con (§§§), $DE : LK = LK : LE = LE : DN$, ciò che si voleva dimostrare.

“E’ opportuno osservare”, prosegue G. Grandi, “che la curva descritta dall’estremo Q durante il suo movimento è un’iperbole equilatera con asse uguale a 2AB; lo strumento servirà quindi anche per tracciare facilmente e rapidamente archi di iperbole”.
 Sarebbe a tale scopo sufficiente inserire in Q un tracciatore, guidato dal filo durante lo spostamento del cursore B:

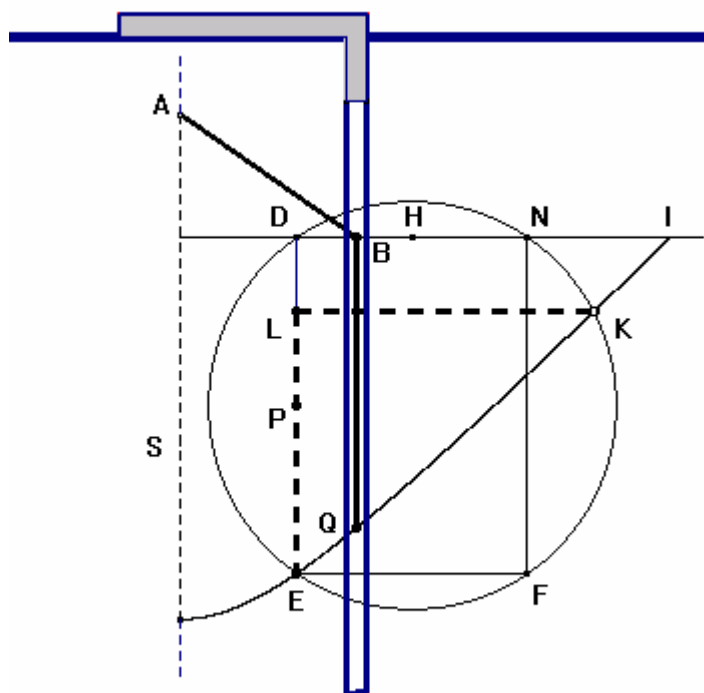


Fig.12

ma potrebbe essere difficile, per chi non sia esercitato, mantenere la verticalità del filo (nella parte che va da B a Q) durante il movimento. E’ quindi opportuno introdurre una piccola modifica. Si fissi al di sopra della circonferenza circoscritta al rettangolo una rotaia rettilinea parallela a BI

Fig. 13

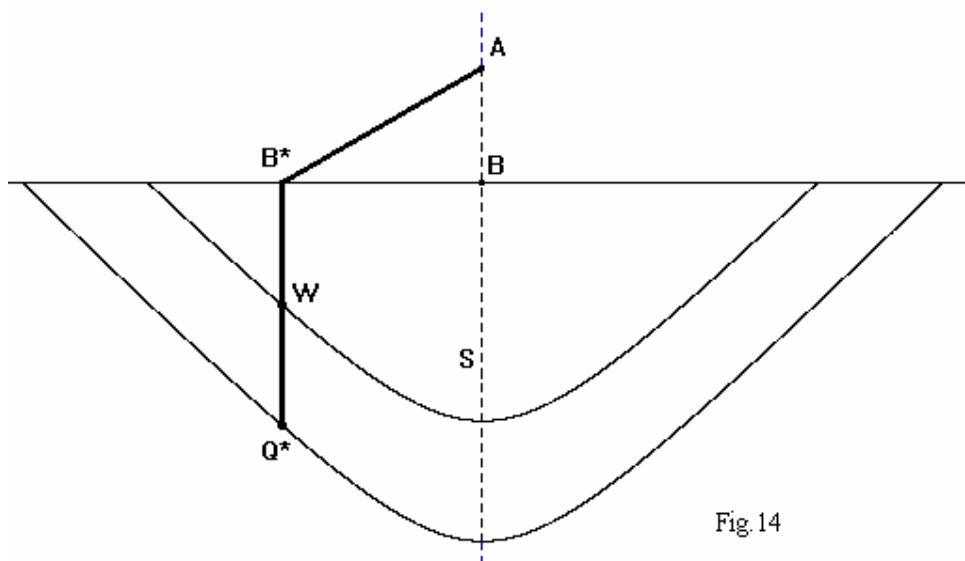
Determiniamo l'equazione dell'iperbole. Sulla retta per **B** perpendicolare a **DN** (cfr. Fig. 13) segniamo due punti **T** ed **O**, tali che

Assumiamo **O** come centro del riferimento cartesiano (ortonormale), **OA** come asse delle ascisse. Sia **R(x; y)** un punto generico della curva descritta da **Q**, **S** il piede della perpendicolare condotta da **R** all'asse **OA**. Indichiamo con **G** la proiezione ortogonale di **R** sulla retta **BI**. Poiché **AG + GR = AQ**, togliendo ad entrambi i membri di questa uguaglianza **GR = BS** si ricava subito **AG = TS**.

possiamo scrivere successivamente

Da quest'ultima uguaglianza, essendo $\mathbf{BG} = \mathbf{y}$, $\mathbf{OS} = \mathbf{x}$, $\mathbf{QS} = \mathbf{x} - 2\mathbf{AB}$ si ha l'equazione $\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}(\mathbf{x} - 2\mathbf{AB})$, che rappresenta appunto un'iperbole equilatera di centro $\mathbf{O}$ e asse (reale) $2\mathbf{AB}$.

Ogni altro punto W del filo che sia compreso tra Q^* e B^* descriverà un arco della medesima iperbole tracciata da Q^* , ma traslato verso l'alto di un tratto WQ^* . Ciò, fino a quando W rimane al di sotto della retta BI : se il punto W oltrepassa tale retta, inizia a percorrere una circonferenza di centro A (cfr. Fig. 14: nella simulazione abbiamo tolto alcuni vincoli, in modo che i tracciatori Q e W possano disegnare archi simmetrici rispetto alla retta AB).



5. Dall'iperbolografo di G. Grandi a un meccanismo di G. Suardi

Il curvgrafo di cui parleremo in quest'ultimo paragrafo non ha niente a che fare con l'inserimento di medie proporzionali fra grandezze assegnate: è però opportuno presentarlo qui perché da un punto di vista meccanico appare del tutto simile, come subito vedremo, al mesolabio di G. Grandi. Ne abbiamo letto la descrizione in un volumetto di Giambattista Suardi (accademico settecentesco interessato alla matematica) ⁽¹¹⁾.

Il problema da risolvere è posto nei termini seguenti. Sia dato un triangolo isoscele AEF , di perimetro $2p$ e angolo al vertice in A , inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r (Fig. 15) con diametro AO

⁽¹¹⁾ Cfr. *Trattenimenti matematici del conte Giambattista Suardi bresciano, dell'Accademia dell'Instituto e Clementina di Bologna e degli Agiati di Roveredo*, Brescia 1764, pag. 184 – 195.

perpendicolare ad **EF**. Si chiede di determinare eventuali altri triangoli isosceli di vertice **A**, inscritti nella medesima circonferenza e aventi il medesimo perimetro.

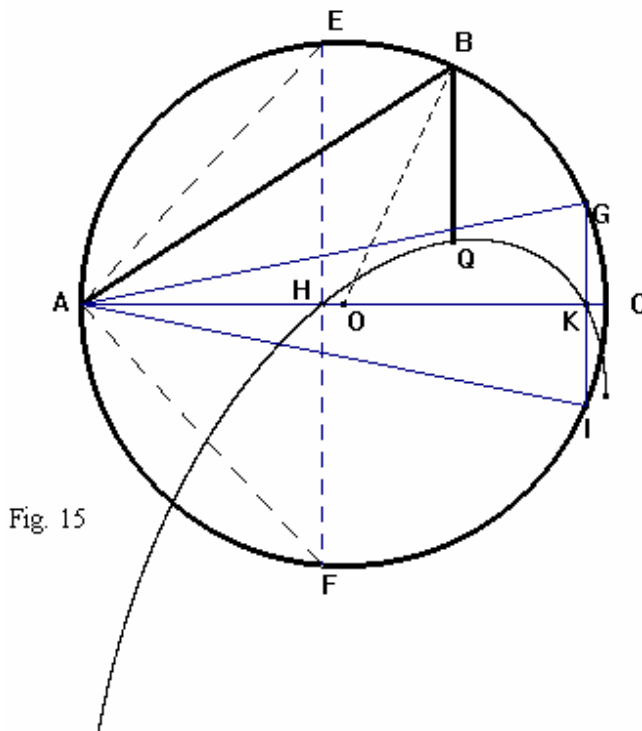


Fig. 15

Si disponga il foglio su cui sono disegnati il triangolo assegnato e la circonferenza circoscritta in un piano verticale. Si fissi in **A** il primo estremo d'un filo di lunghezza **p** (semiperimetro del triangolo **AEF**); si faccia passare il filo per un foro praticato nel cursore **B** costretto da una manovella **OB** a scorrere lungo la semicirconferenza **AC**; si attacchi infine un piombo al secondo estremo **Q** in modo che il filo stesso rimanga teso. Quando **B** si muove, anche il tratto **BQ** del filo si sposta, rimanendo

sempre verticale: **Q** descrive una curva che interseca certamente il diametro **AO** in **H** (punto di intersezione con il lato **EF** del triangolo dato); se esiste anche un'altra intersezione **K** (più di una è impossibile) essa fornirà la soluzione cercata (sarà sufficiente segnare **K** sul diametro e innalzare da **K** la perpendicolare ad **AO** fino ad intersecare la circonferenza in **G** ed **I**, determinando così il triangolo isoscele **AGI**, di perimetro **2p**).

Volendo agire sul piano orizzontale o tracciare la curva percorsa da **Q** con maggiore sicurezza, converrà (come già è stato fatto nel mesolabio di Grandi) attrezzare lo strumento con una squadra **LMN** (Fig. 16) il cui lato **LM** scivola lungo una guida rettilinea parallela ad **AO**, mentre sul lato **MN** è fresata una scanalatura entro cui sono inseriti l'estremo **B** della manovella **OB** e il tracciatore **Q**. L'operatore sposta la squadra girando la manovella con una mano, mentre con l'altra sorregge il tracciatore tenendo il filo teso: la perpendicolarità di **BQ** e **AO** durante il moto è così assicurata.

Determiniamo l'equazione della curva "organicamente descritta" dallo strumento, scegliendo il riferimento cartesiano (ortonormale) con origine in **A** e asse delle ascisse sovrapposto al diametro **AO**.

Poniamo **OB = r**
(AC = 2r), **BÔC = 2α**
 (quindi **BÂC = α**)
AB + BQ = p.

Indichiamo con **x** e **y** le coordinate di **Q**.

Si ha facilmente (usare il triangolo rettangolo **CBA**):

$$x = (2r \cos \alpha) \cos \alpha,$$

$$y = r \sin 2\alpha - (p - 2r \cos \alpha)$$

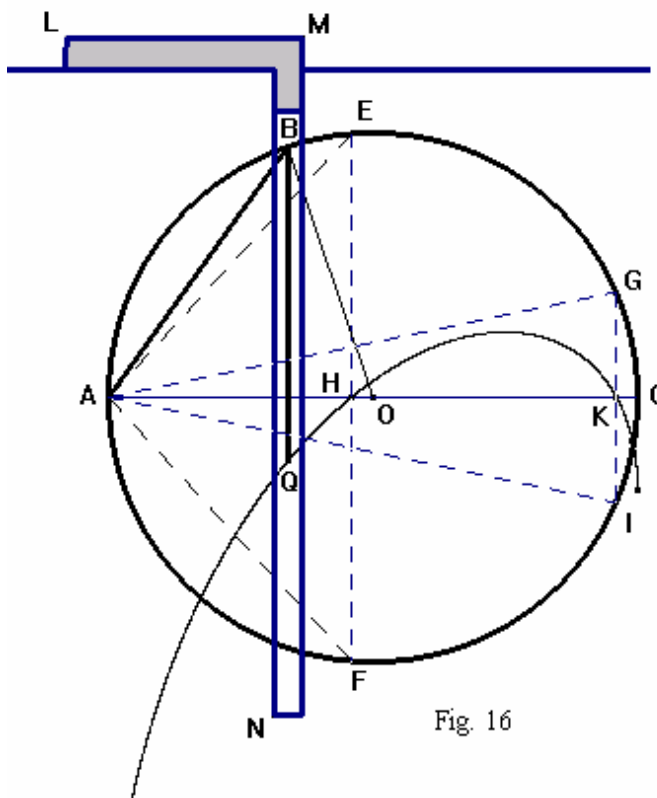


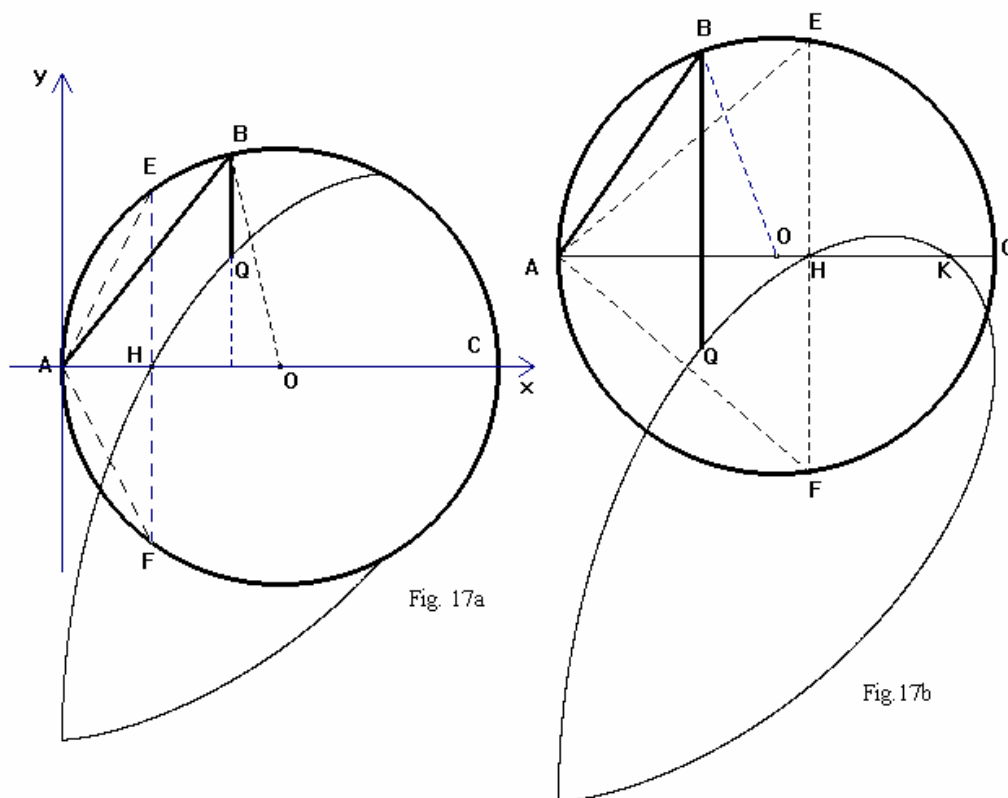
Fig. 16

Possiamo allora immaginare che il cursore **B** sia libero di muoversi lungo l'intera circonferenza. Se però accade che **p = 2r cos α** (ciò può verificarsi soltanto per **p < 2r**) è ovvio che il movimento si blocca: infatti in tal caso, quando **Q** e **B** coincidono, la squadra non potrà più allontanarsi dal perno **A**, e avremo come unica intersezione tra **AO** e la curva il punto **H**) (cfr. Fig. 17a). Eliminando il parametro **α** si ottiene successivamente:

$$(y + p)^4 + 2(y + p)^2(x^2 - 4rx) - 8rx^2(2r - x) + (x^2 - 4rx)^2 = 0.$$

$$(y + p)^4 + 2(y + p)^2(x^2 - 4rx) + x^4 = 0 \quad (\S\S\S\S)$$

Al variare di **p**, la curva trasla verso l'alto o verso il basso restando immutata (cfr. Fig. 17b): se **p < 2r** ne sarà tracciata solo una parte (cfr. Fig. 17a). Si può dimostrare che la curva è tangente al diametro **AO** quando il triangolo assegnato **AEF** è equilatero.



“La circonferenza di centro O ”, nota il Suardi, “è una direttrice variabile a capriccio, e che poteva essere del pari una linea retta, una ellisse, una concoide di base circolare ecc.; il suo diametro è una linea data di posizione, perché ad essa potevasi applicare qualunque altra direttrice”.

E' dunque possibile riproporre il problema dei triangoli isoperimetrici scegliendo direttrici diverse dalla circonferenza. Ma soprattutto, prendendo spunto da questa osservazione, è agevole ideare o costruire fisicamente numerosi altri meccanismi (divertenti da simulare in Cabri) appartenenti tutti (come quelli di G. Grandi e di G. Suardi) all'insieme dei curvigrati che utilizzano fili ABQ di lunghezza costante. Si vedano gli esempi di Fig. 18, che presentiamo senza commento.

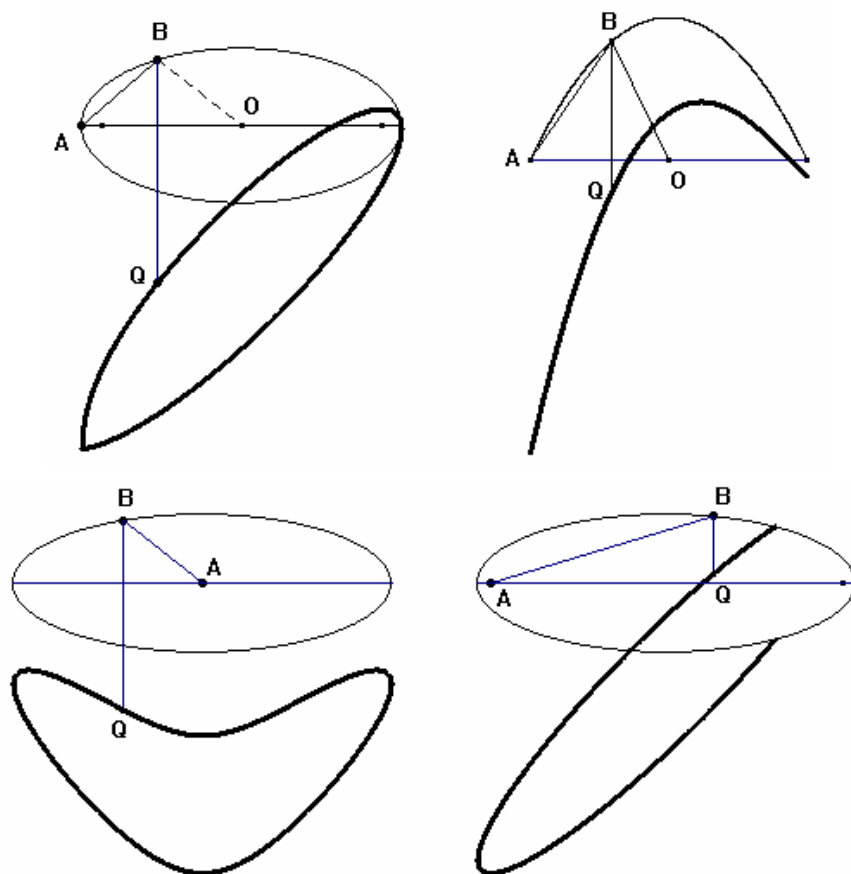


Fig. 18

I modelli descritti sono conservati presso il Laboratorio delle Macchine Matematiche – Dipartimento di Matematica Pura e Applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Telefono: 059 2055039

e-mail: macchine@unimore.it

Sito web: www.mmlab.unimore.it

Marcello Pergola
Michela Maschietto