

Modelli fisici per la matematica: biellismi del Peaucellier e del Delaunay.

Marcello Pergola, Michela Maschietto

Riassunto. Si approfondisce lo studio dei meccanismi che utilizzano parallelogrammi (e deltoidi), presentando alcune ricerche sviluppate nella seconda metà del XIX secolo: l'interesse (assai diffuso in quel periodo) dei matematici per i sistemi articolati era collegato sia a problemi pratici (sviluppo della ingegneria meccanica) sia a esigenze teoriche (possibilità di realizzare con essi trasformazioni geometriche e usarli nello studio delle curve piane).

Abstract. In this paper, we study the mechanisms using parallelograms (and kites) through the presentation of some researches developed in the second half of the 19th century. The interest (diffused in that period) of mathematicians for articulated mechanisms was connected both to practical problems (development of mechanic engineering) and to theoretical reasons (possibility of using those mechanisms to do geometrical transformations and to study plane curves).

Marcello Pergola

pernon@iol.it

Michela Maschietto

maschietto.michela@unimore.it

1. Introduzione.

Si osservi la Fig. 1.

Due rombi articolati (ABCD, con lato $AB = a$; EBFD, con lato $BF = b$; $a > b$) sono connessi mediante cerniere collocate agli estremi della diagonale comune BD; le altre quattro cerniere (che si trovano in A, E, F, C) giacciono quindi su una

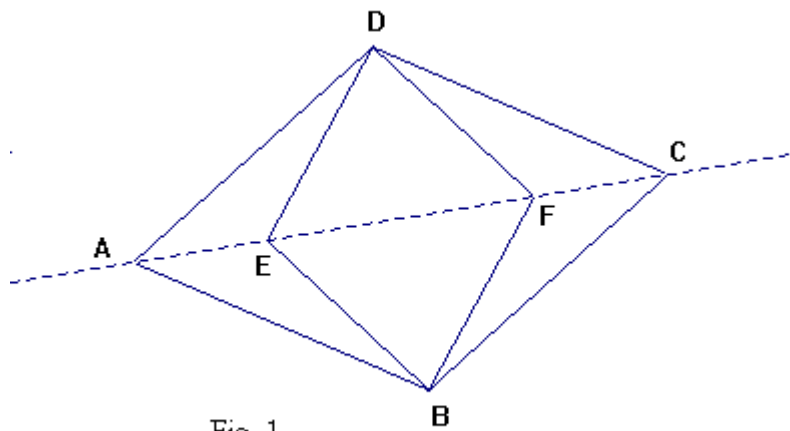


Fig. 1

retta perpendicolare ad AB.

La medesima figura è leggibile anche in modo diverso: possiamo immaginare infatti che le cerniere poste in B e D colleghino i deltoidi articolati ABFD e BCDE (congruenti).

Fissate le lunghezze a e b , questo elementare sistema articolato, se è libero di muoversi nel proprio piano, possiede quattro gradi di libertà: ma, sottoponendo uno o più dei suoi vertici a vincoli opportuni, oppure modificando leggermente la sua configurazione, se ne possono ricavare svariati meccanismi interessanti, che generano trasformazioni e tracciano curve. Di questi ci occuperemo nei prossimi paragrafi. Riceverà ulteriore conferma un fatto già rilevato in un articolo precedente ⁽¹⁾: l'introduzione del movimento arricchisce in modo straordinario la geometria di figure semplici come rombi, parallelogrammi, deltoidi, le cui proprietà acquistano il carattere di invarianti (rispetto al movimento) rendendoli versatili e preziosi "organi di macchina".

2. Inversione circolare.

Supponiamo (cfr. ancora Fig.1) che A sia un perno fissato al piano. In questo

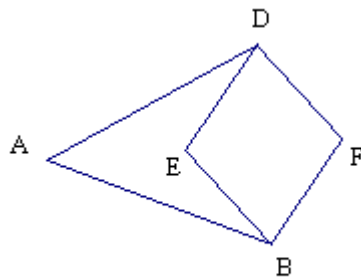


Fig. 2

caso, le cerniere B e D sono obbligate a muoversi su una circonferenza (con centro in A). Il punto (la cerniera) E ha due gradi di libertà: fissata la posizione di E, risultano determinate anche quelle di F e di C. Se ci limitiamo a studiare la corrispondenza tra E ed F possiamo eliminare le aste che convergono a C, ottenendo il meccanismo di Fig.2.

E' chiaro che, durante la deformazione del sistema articolato, i punti A, E, F sono sempre allineati sulla bisettrice

dell'angolo BAD. Inoltre, tracciata (Fig. 3) la circonferenza di centro D e raggio $DF = b$, applicando il teorema delle secanti (e misurando le lunghezze a partire dal punto fisso A, assunto come origine) si ricava: $AE \times AF = AT \times AS = (AD + DS) \times (AD - DT) = (a + b) \times (a - b)$ (sappiamo infatti che $AD = AB = a$, $DS = DT = BF = BE = b$).

Cioè: (I) $AE \times AF = a^2 - b^2$: costante (> 0) qualunque sia la configurazione assunta dallo strumento.

I punti E ed F si corrispondono quindi in una inversione circolare avente come circonferenza base quella di centro A e raggio $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Il punto E si muove internamente alla regione piana limitata dalle circonferenze di centro A e raggi

$r = (a - b)$, $R = \sqrt{a^2 - b^2}$: il sistema articolato (inversore di Peaucellier, 1864) costruisce l'inverso di ogni punto di tale regione (corona circolare) rispetto alla circonferenza base. Cfr. Fig. 4.

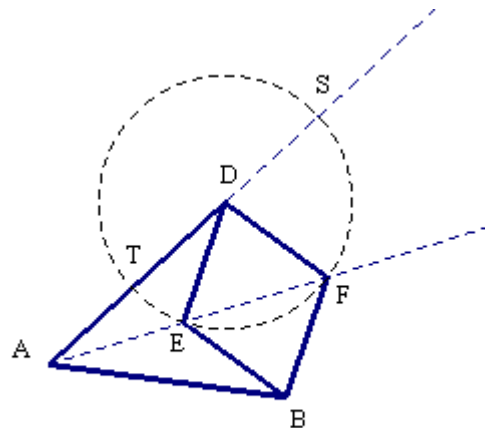


Fig. 3

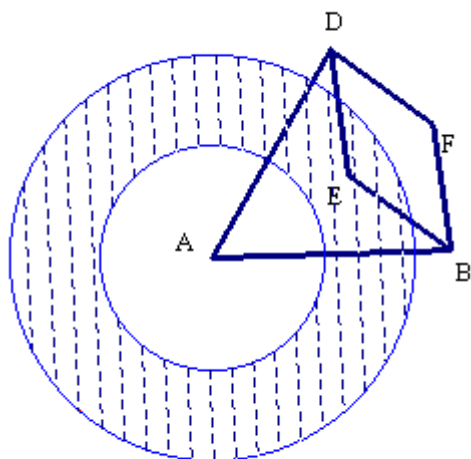


Fig. 4

Nel meccanismo di Fig. 1 il perno, anziché in A, può essere collocato in E, che sarà così fissato al piano. Al variare di A, rimane determinata la posizione dei punti F e C. Esaminiamo la corrispondenza tra A e C, eliminando le aste che convergono in F (Fig. 5).

Poiché le lunghezze sono ora misurate a partire da E,

EA = -AE, AF = EC; la (I) diventa
(2) $EA \times AF = b^2 - a^2$ (< 0).

Abbiamo ancora una inversione circolare (di centro E), ma con il raggio della circonferenza base immaginario (antiinversione circolare).

Dal confronto tra Fig. 1 , Fig. 2 e Fig. 5 ricaviamo immediatamente che l'antiinversione si può ottenere come prodotto di una inversione circolare per una simmetria centrale (centro dell'inversione coincidente col centro di simmetria).



Verifichiamolo anche per via analitica.

In un riferimento cartesiano avente l'origine nel perno fisso (A in Fig. 2, E in Fig. 5), indicando con $(x; y)$ e $(x'; y')$ le coordinate dei punti corrispondenti (E ed F in Fig. 2, A e C in Fig. 5), le (1) e (2) si scrivono:

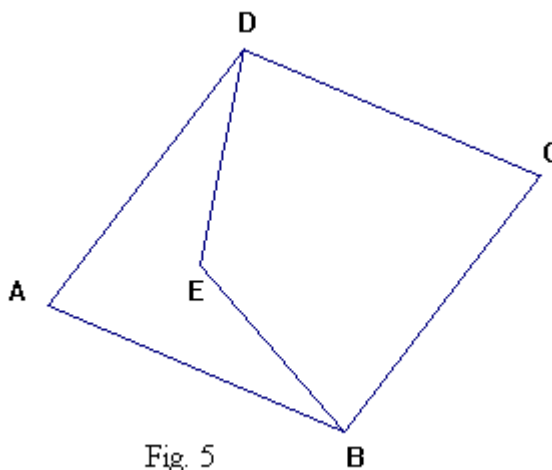


Fig. 5

$\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)} = \pm R^2 = \pm(a^2 - b^2)$ (potenza dell'inversione); i punti A, E, F, C appartengono inoltre alla retta $yx' - xy' = 0$. Quest'ultima equazione insieme alla precedente forma un sistema che (risolto rispetto a x' e y') fornisce:

$$(3) \begin{cases} x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ oppure } (4) \begin{cases} x' = \frac{-R^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{-R^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ (secondo il segno della potenza).}$$

E' evidente che le (4) si ottengono dalle (3) eseguendo una simmetria rispetto all'origine.

3. Come disegnare una linea retta.

La riga e il compasso, che nella geometria classica avevano la funzione di veri e propri strumenti di calcolo, sono ancor oggi così familiari e diffusi che difficilmente si riflette sulla loro profonda differenza: usando la riga, si ricopia sul foglio una traiettoria rettilinea già costruita in precedenza; invece il compasso incorpora una legge (proprietà) geometrica che costringe il tracciante a descrivere una determinata traiettoria (inesistente prima che il movimento si verifichi). Nella riga, la retta è fisicamente presente; nel compasso è materializzata la proprietà che definisce una circonferenza. Sottolineare questa diversità conduce subito a un

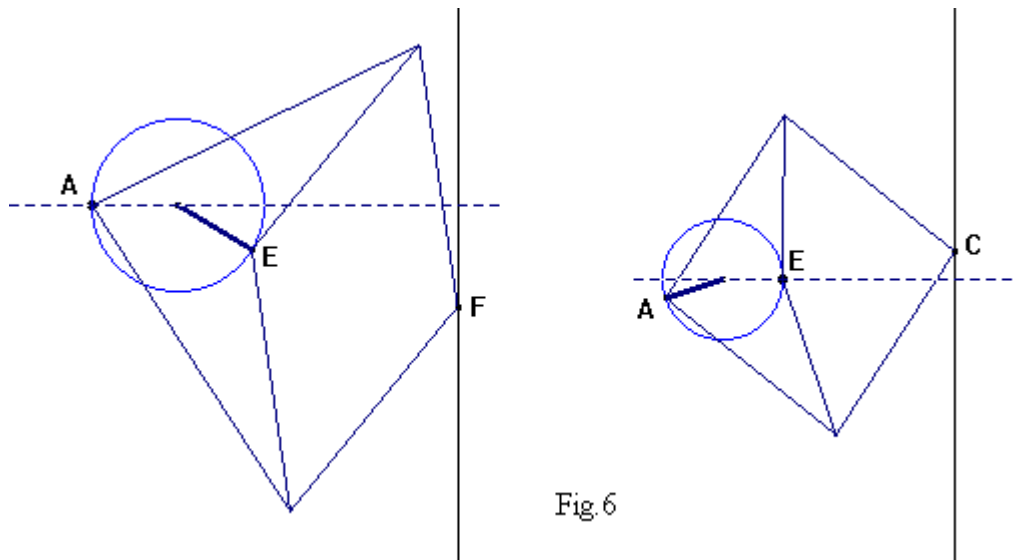


Fig. 6

problema: è possibile realizzare meccanismi che costringano un punto a muoversi di moto rettilineo in base a proprietà geometriche inglobate nei meccanismi stessi, senza ricorrere quindi alla predeterminazione fisica della traiettoria?.

E' questo il problema della "guida rettilinea", collegato alla storia della macchina a vapore, alla evoluzione del sistema biella-manovella. Il parallelogramma di Watt (uno dei più antichi sistemi articolati usati nella tecnica: 1784) lo risolve solo approssimativamente, sfruttando curve a "lunga inflessione" che, in prossimità del punto di flesso, hanno andamento pressoché rettilineo.

Peaucellier, nel 1864, trovò una soluzione rigorosa, mediante l'inversore descritto nel paragrafo 2. Vale infatti la seguente proprietà: se (Fig. 2) per mezzo di una manovella, il punto E è costretto a muoversi su una circonferenza passante per un perno fissato in A, allora F, corrispondente di E nella inversione circolare di centro A, percorre un segmento di retta. Si può anche usare l'antiinversione (Fig.5): E è il perno fisso, A percorre la circonferenza passante per E, C (corrispondente di A) descrive la retta. I meccanismi di Peaucellier (schematizzati in Fig. 6) sono tuttavia, da un punto di vista ingegneristico, meno efficienti di quelli ideati da Watt.

"L'invenzione di A. Peaucellier passò inosservata e, fatto non banale, proprio in un periodo in cui eminenti geometri erano giunti a dubitare che una soluzione rigorosa al problema della guida rettilinea fosse possibile. Ma quando, nel 1871, L. Lipkine, allievo di P. Tchebiceff, ritrovò a sua volta la soluzione esatta di Peaucellier, ricevendone una ricompensa dal suo governo, anche il primo inventore fu riscoperto e riconosciuto. J.J. Sylvester si interessò moltissimo a questa scoperta, impegnandosi a pubblicizzarla e ad estenderla. Il suo intervento fece sì che i sistemi articolati diventassero di gran moda in Inghilterra, dove furono estesamente studiati" ⁽²⁾.

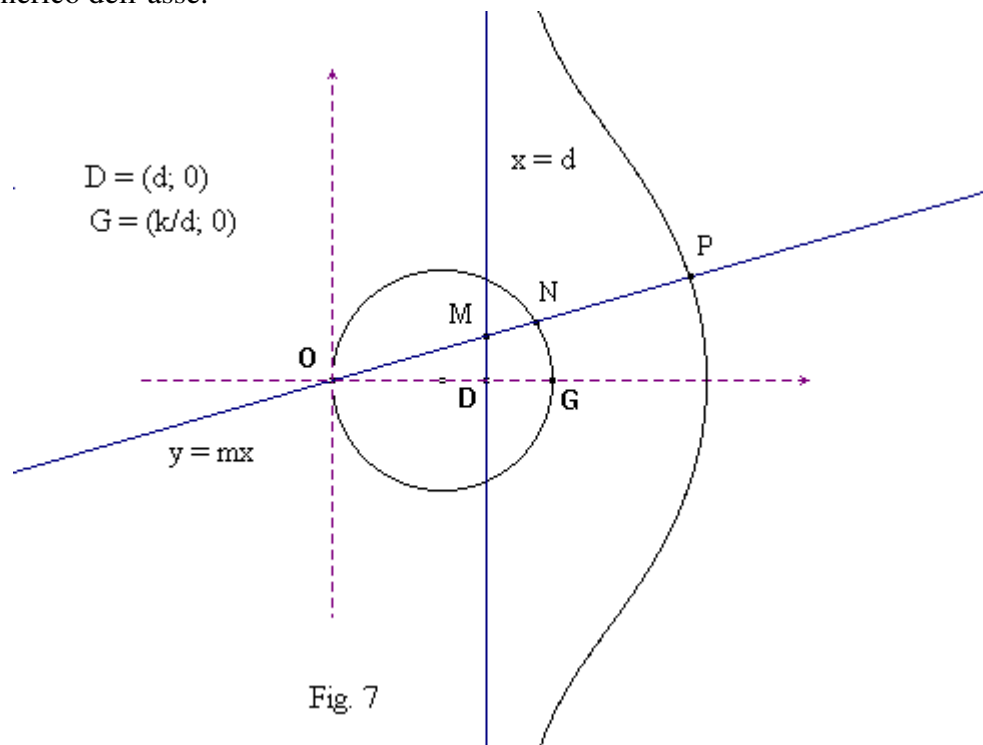
Notiamo infine che la retta corrispondente a una circonferenza passante per il centro di inversione è sempre perpendicolare al diametro passante per tale centro: dunque con lo strumento di Peaucellier si può tracciare una perpendicolare a una retta assegnata. (cfr. Fig. 6).

4. La concoide di R. De Sluse.

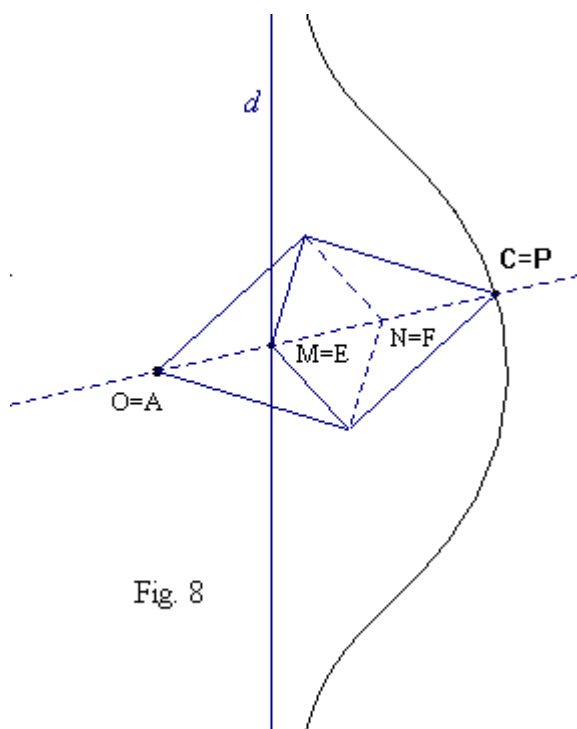
L'inversore di Peaucellier può servire come organo meccanico per tracciare curve nella cui definizione si fa ricorso a inversioni circolari. Ecco un esempio.

Fra le sette cubiche che Newton ⁽³⁾ classifica come iperboli difettive monodiametrali, ce ne sono tre singolari (con un punto doppio): verso la metà del

‘600 ne erano conosciute due: la cissoide (dotata di cuspide) e il “folium” di Cartesio (dotata di nodo). In una lettera a Huygens del 1662, il matematico olandese R. De Sluse scopre la terza (che per la sua forma sarà poi chiamata concoide di Sluse), quella dotata di un punto doppio isolato. J. Steiner (1838) osserverà poi che si tratta della podaria di una parabola rispetto a un punto generico dell’asse.



Dalla definizione originaria di De Sluse si ricava la seguente costruzione per la concoide. Nel riferimento di Fig. 7, consideriamo: la retta di equazione $x = d$, la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - \frac{k}{d}x = 0$ (avente centro nel punto $\left(\frac{k}{2d}, 0\right)$ e passante per l’origine O), infine una retta generica ruotante attorno ad O. Quest’ultima intersechi in M la retta $x = d$, in N la circonferenza. Il punto P della concoide si ottiene portando, nello stesso verso, $MP = ON$. Per il teorema della secante è $OM \times ON = OD \times OG = OM \times MP = k$. Quindi M ed N si corrispondono nella inversione circolare di polo O e potenza k. Utilizzando il sistema articolato di Fig. 1 (ricordare, oltre a quanto dimostrato in **2**, che $AF = EC$) è allora facile tracciare la concoide. Vincoliamo (mediante un



perno) l'estremo A del rombo di lato maggiore al punto fisso O; sovrapponiamo il vertice E del rombo di lato minore al punto M, costringendolo (mediante un cursore) a scorrere lungo la retta $x = d$: allora l'estremo C (opposto ad A) del rombo di lato maggiore coinciderà con P e descriverà la conicoide. (Fig. 8). Se non interessa mettere in evidenza la circonferenza corrispondente (nell'inversione di polo O e potenza k) alla retta $x = d$, che sarebbe descritta dal punto F (sovrapposto a N), si possono eliminare le aste convergenti ad F. Riprendiamo in osservazione la Fig. 7. Riportando $MP = ON$ in verso opposto a quello di ON

(anziché nel medesimo verso) non otterremmo più una concoide di Sluse, ma una cubica nodata, descritta dal punto Q (simmetrico di P rispetto al centro variabile M): cubica che si può disegnare “montando” il sistema articolato di Fig. 1 nel modo descritto in Fig. 9

Notiamo esplicitamente che mentre nello strumento di Fig. 8 i punti M ed N (E ed F) si corrispondono in una inversione (di centro O), nella Fig. 9 i punti M (A) e C si corrispondono in una antiinversione (il centro è

Torniamo ora alla Fig. 1. Eliminiamo (dal rombo che ha i lati più lunghi) le aste convergenti al punto C. Mediante una manovella impernata in M, la cerniera

posta in A è costretta a muoversi lungo una circonferenza, mentre le sbarre AD e AB trasmettono alle cerniere poste in D e in B, vincolate a cursori guidati dalla scanalatura rettilinea t , i movimenti di A. (Fig. 11)

Sia $AD = AB = a$, $ED = DF = FB = BE = b$; indichiamo con d la distanza fra M e la retta t ; con $(x; y)$ le coordinate del punto A, con $(X; Y)$ quelle del punto E; poniamo inoltre $k^2 = a^2 - b^2$ (il riferimento è quello indicato in Fig. 11).

Abbiamo:

$$X^2 = b^2 - DH^2 = b^2 - (a^2 - x^2) = x^2 - (a^2 - b^2) = x^2 - k^2; \quad Y = y$$

da cui $x^2 = X^2 + k^2$, $y = Y$.

Sostituendo questi valori nella equazione $(x-d)^2 + y^2 = r^2$ (traiettoria del punto A) che si può scrivere $2dx = x^2 + y^2 + d^2 - r^2$ o anche $(\pm 2dx)^2 = 4d^2 x^2 = (x^2 + y^2 + d^2 - r^2)^2$ ricaviamo subito quella del luogo descritto dai punti E ed F (simmetrici rispetto all'asse delle y):

$$(6) \quad (X^2 + Y^2 + k^2 + d^2 - r^2)^2 = 4d^2 (X^2 + k^2).$$

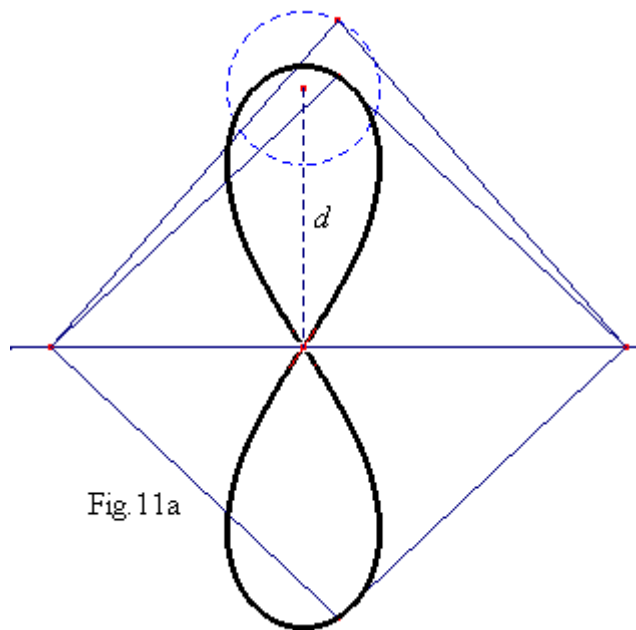
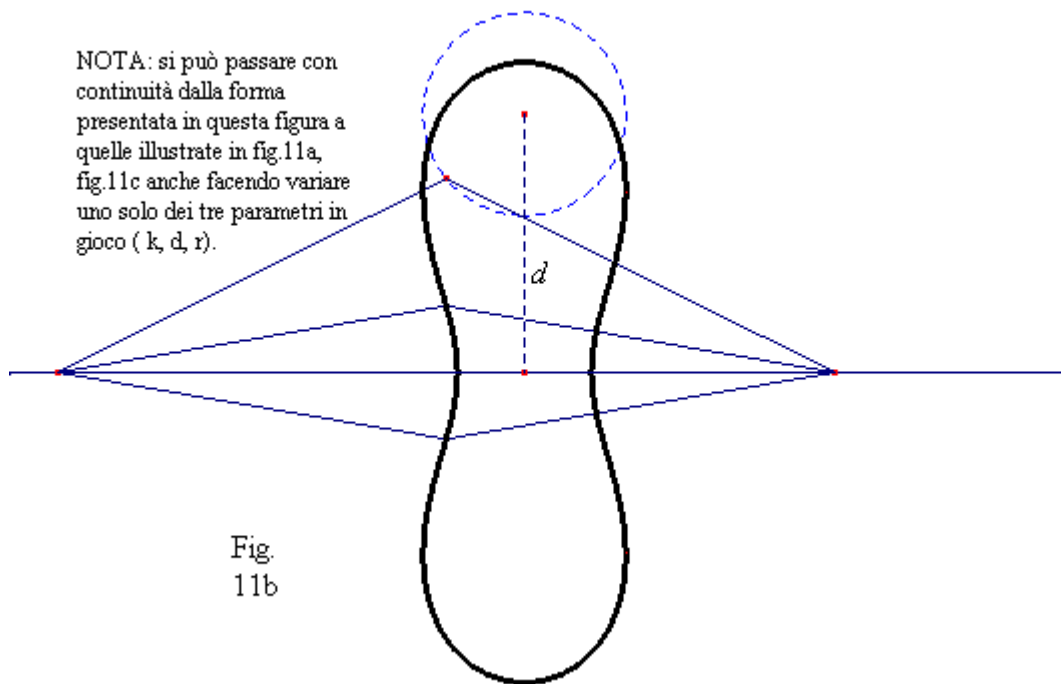


Fig. 11a

La equazione (6) così ottenuta rappresenta una famiglia di curve (quartiche bicircolari con due assi di simmetria) la cui forma dipende dai valori dei parametri k, d, r (cfr. Figg. 11a, 11b, 11c). Erano note fin dall'antichità ⁽⁵⁾ col nome di *spiriche* perché sezioni piane di particolari superfici tridimensionali chiamate *spire* (attualmente *superfici toriche*) ottenute facendo ruotare una circonferenza Γ intorno a una retta giacente nel piano di Γ . Le spiriche di cui qui ci occupiamo sono ricavate con piani secanti paralleli all'asse di rotazione.

Ovviamente, considerando la (6) in quanto equazione di una curva generata non



più con lo strumento meccanico della Fig. 11, ma attraverso la sezione piana di un toro, cambia l'interpretazione geometrica dei parametri k, d, r .

Si ricordi infatti che (fissata nello spazio una terna trirettangola $O(x,y,z)$ di assi cartesiani) l'equazione della superficie generata facendo ruotare attorno all'asse delle y la circonferenza

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{è: } (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + z^2) \quad (6).$$

Tagliando questa superficie con un piano $z = k$ si riottiene la (6): ma r rappresenta ora il raggio della circonferenza ruotante (generatrice), a la distanza tra il centro di tale circonferenza e l'asse di rotazione, k la distanza tra asse di rotazione e piano secante.

Esaminiamo due casi particolari importanti.

Scegliendo $k = r$, (occorre, nel meccanismo di Fig.11, cambiare i valori di a e b , cioè la lunghezza del lato dei rombi) la (6) diventa:

$$(7) (X^2 + Y^2 + d^2)^2 = 4d^2(X^2 + r^2).$$

Da quest'ultima, successivamente:

$$(X^2 + Y^2 + d^2)^2 - 4d^2 X^2 = 4d^2 r^2, \quad ((x+d)^2 + y^2)((x-d)^2 - y^2) = 4d^2 r^2,$$

e infine:

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 2dr.$$

L'equazione (7) rappresenta quindi le curve luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze dai due punti fissi $(-d; 0)$, $(+d, 0)$: sono le ovali del Cassini (o cassinoidi, generalizzazione delle coniche) così chiamate perché l'astronomo Jean Dominique Cassini (1625 – 1712) le studiò ritenendo che potessero servire a descrivere la traiettoria dei pianeti nel sistema solare.⁽⁷⁾

Se poi $r = \frac{d}{2}$, la (7) si scrive

$$(x^2 + y^2 + d^2) - 4d^2 x^2 = d^4, \quad \text{da cui}$$

(con facili calcoli):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Ritroviamo così la lemniscata di Giacomo Bernoulli,⁽⁸⁾ che differisce da quella rappresentata in Fig. 11a perché nel centro di simmetria (punto di doppia inflessione) ha tangenti fra loro perpendicolari.

6. Polarità circolare.

L'inversione rispetto a una circonferenza Γ di centro O si può anche definire come quella trasformazione che ad ogni punto P del piano di Γ (diverso da O) fa corrispondere la intersezione della retta OP con la polare di P rispetto a Γ .

Infatti (cfr. Fig. 12) sia $x^2 + y^2 = r^2$ l'equazione di Γ ; $P(X, Y)$ un generico punto del piano di Γ ($\neq O$). La polare di P rispetto a Γ ha equazione $Xx + Yy = r^2$; la

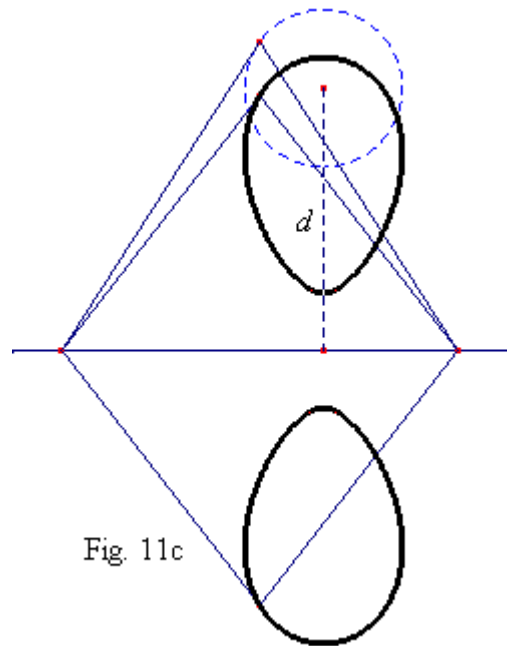


Fig. 11c

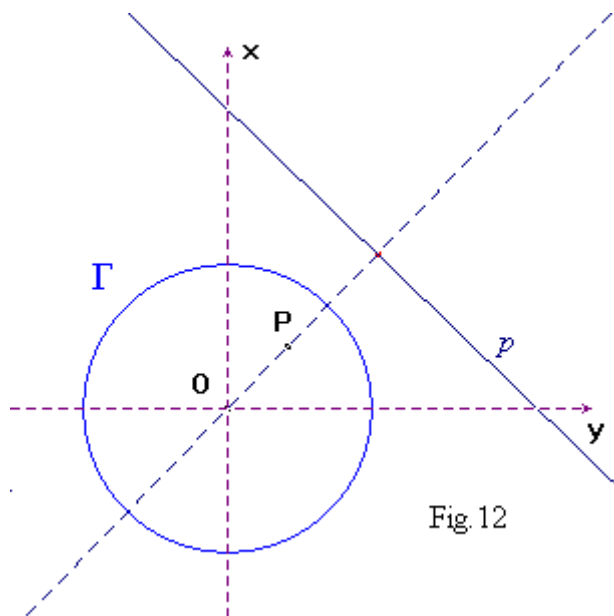


Fig. 12

retta OP ha invece equazione $Yx - Xy = 0$. Risolvendo il sistema formato dalle equazioni di queste due rette si ricava:

$$\begin{cases} x = \frac{Xr^2}{X^2 + Y^2} \\ y = \frac{Yr^2}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad \text{cioè (cfr. (3))}$$

le equazioni della inversione circolare. Dall'inversore di Peaucellier (costruito assumendo la Γ come circonferenza fondamentale) è facile allora ricavare un meccanismo che ad ogni punto P di una regione piana (limitata, come sempre

accade in tutti gli strumenti fisici) faccia corrispondere la sua polare, e che quindi, anziché "pilotare" un punto o un tracciatore, guidi il movimento di una retta. Si

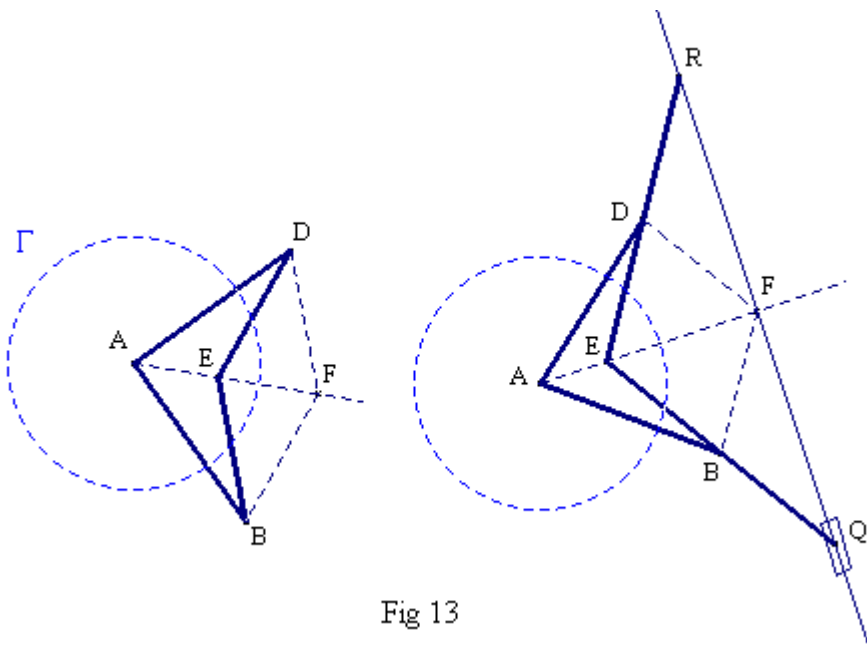


Fig. 13

ottiene così uno strumento che (assieme a numerosi altri aventi la medesima caratteristica) potrà essere utilizzato nello studio degli involuipi. Procediamo come segue (il sistema di partenza è ancora quello di Fig. 2).

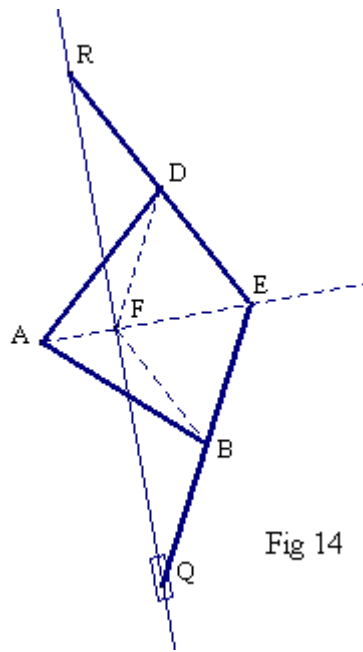


Fig 14

Le aste DF e BF (tratteggiate in Fig. 13) vengono soppresse; le aste EB e ED sono sostituite con altre due, di lunghezza doppia, libere di ruotare attorno ai loro punti medi D,B; una terza asta RQ, incernierata in R, scorre attraverso una guida girevole attorno a Q. L'asta RQ (perpendicolare ad AE e passante per F, corrispondente di E nell'inversione) materializza la polare del punto E.

L'apparecchio si può realizzare in modo che E, anziché interno, sia esterno alla circonferenza Γ (Fig. 14).

Se E percorre una retta (scorrendo per es. all'interno di una scanalatura rettilinea r) la sua polare descrive un fascio il cui centro proprio è

polo della retta: l'asta RQ ruota e scivola nel piano passando sempre per F (polo di r).

Si può costringere RQ a ruotare (senza slittare) attorno al polo di r : a tale scopo occorre (Fig. 15) imperniare l'asta RQ in F, collocando però in R una seconda guida girevole.

Osserviamo infine che nei biellismi di Peaucellier (Fig. 2 e segg.), di Delaunay (Fig. 10 e segg.), e in quelli che realizzano la polarità rispetto a una circonferenza (Fig. 13 e segg.) non è essenziale la simmetria rispetto alla retta AEF.⁽⁹⁾

I rombi possono essere sostituiti con deltoidi.

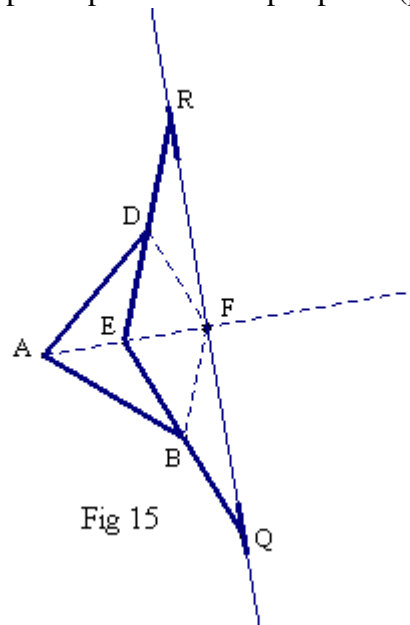


Fig 15

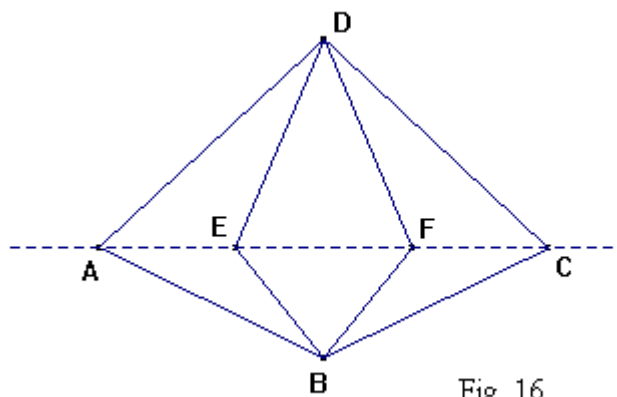


Fig. 16

Più precisamente: usando un sistema articolato come quello della Fig. 16 sarebbe possibile sviluppare un discorso analogo a quello svolto nel presente articolo partendo dalla Fig. 1.

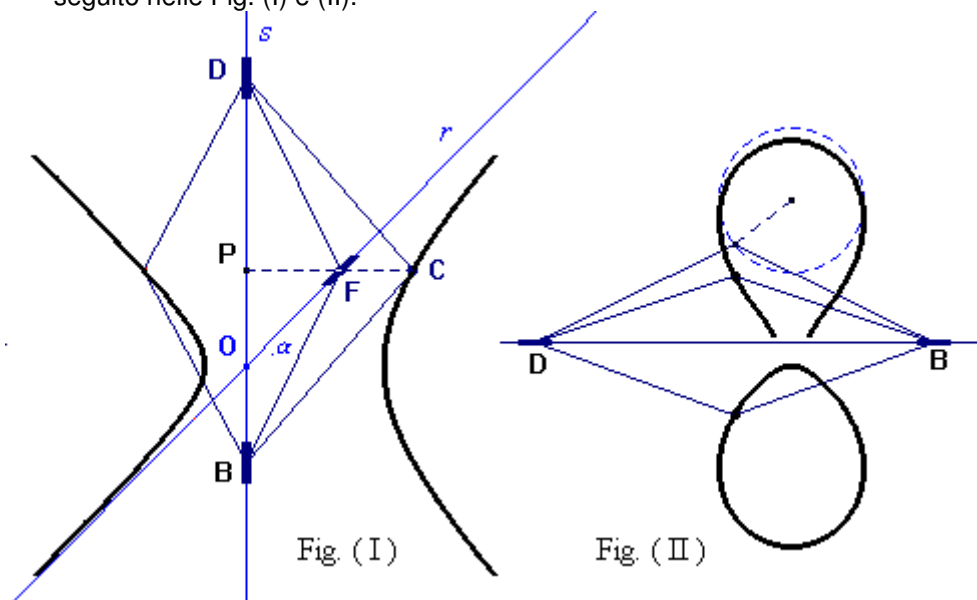
I modelli fisici descritti sono conservati presso il Laboratorio delle Macchine Matematiche - Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Telefono: 059 2055039

e-mail: macchine@unimore.it Sito web: www.macchinematematiche.unimore.it

- (1) Cfr. M. Pergola, C. Zanolì, A. Martinez, M. Turrini, Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi, deltoidi articolati, in *Progetto Alice*, 2002-II, vol. III, n° 8.
- (2) Cfr. G. Koenigs, *Lezioni di Cinematica*, 1897, cap. XI, par. 86. Nel 1874 (utilizzando un antiparallelogramma articolato) H. Hart costruì un inversore mediante il quale il moto rettilineo si ottiene con un biellismo formato da cinque aste soltanto (è il minimo numero possibile). Cfr. H. Hart, *On certain conversions of motion*, Messenger of Mathematics, t. IV, pag. 82 e pag. 116. Altre soluzioni al problema della guida rettilinea, di tipo completamente diverso (non fanno ricorso all'inversione circolare) furono studiate da A. B. Kempe nel 1875. Cfr. A. B. Kempe, *How to draw a Straight Line: a lecture on Linkages*, New York 1953 (ristampa).
- (3) Cfr. I. Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, London, 1704 – 1711.
- (4) Cfr. per es. M. N. Delaunay, *Sur quelques nouveaux mécanismes*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1895
- (5) *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum liber*, ed. Friedlein 1873 (ed. inglese Taylor, 1792, ed. francese Ver Eecke, 1948). Proclo attribuisce al matematico Perseo

- (6) Si consideri, nel piano $z = 0$, il cerchio avente centro in $C(a, 0, 0)$ e raggio r . Facciamo ruotare attorno all'asse delle y tale cerchio (curva meridiana): un suo punto generico $(x_0, y_0, 0)$ descrive allora la circonferenza
(*) $x^2 + z^2 = x_0^2$, $y = y_0$ mentre le sue coordinate soddisfano alla relazione
(**) $(x_0 - a)^2 + y_0^2 = r^2$, $z = 0$. Eliminando i parametri x_0, y_0 nel sistema formato dalle (*) e (**) si ottiene subito l'equazione della superficie torica.
- (7) J. D. Cassini, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 8, pag. 43-44. Cfr. anche *Eléments d'Astronomie* di J. Cassini (figlio di Jean Dominique), Paris, 1749.
- (8) J. Bernoulli, *Opera omnia*, I, Genevae 1744, pag. 699.
- (9) I meccanismi del Delaunay possono anche essere modificati in modo che i due tracciatori non siano simmetrici rispetto all'asse BD: in tal caso gli archi disegnati non appartengono più alla medesima curva. Si osservino gli esempi proposti qui di seguito nelle Fig. (I) e (II).



Invece gli strumenti rappresentati in Fig. (III) (costruiti utilizzando il sistema articolato di Fig. 16) disegnano curve identiche a quelle tracciate dai biellismi di Fig. 11a e Fig. 11c.

