

Modelli fisici per la matematica: angoli in movimento

**Marcello Pergola
Michela Maschietto**

Riassunto. Esaminiamo qui alcuni tra i numerosi curvigrafi che, utilizzando come organi meccanici angoli di ampiezza fissa assegnata, tracciano archi (più o meno estesi) di coniche, cubiche, ecc. I matematici se ne sono occupati a lungo, dal XVI secolo fino agli inizi del XX: un riferimento fondamentale è il trattato di Mac Laurin *Linearum geometricarum Descriptio Organica universalis*, 1720. Alcuni meccanismi complessi possono essere studiati attraverso simulazioni al computer (software utilizzato: Cabri II).

Abstract. In this paper, we study some examples of the curvigraphs for drawing (more or less extended) arcs of conics, cubics, etc., that exploit angles with fixed width as mechanical devices. Mathematicians have been showing interest for these mechanisms for a long time, especially over the period extending from the 17th century to the beginning of the 20th century. A fundamental reference text is the work *Linearum geometricarum Descriptio Organica universalis* written by Mac Laurin (1720). As friction and material impediments sometimes hinder the functioning of the most complex instruments, we may study some of them through graphical simulations built using dynamic geometry software (in this case, Cabri II).

Marcello Pergola
per.non@libero.it

Michela Maschietto
maschietto.michela@unimore.it

1. Introduzione

I compassi euclidei si possono schematizzare come in Fig. 1: due asticelle

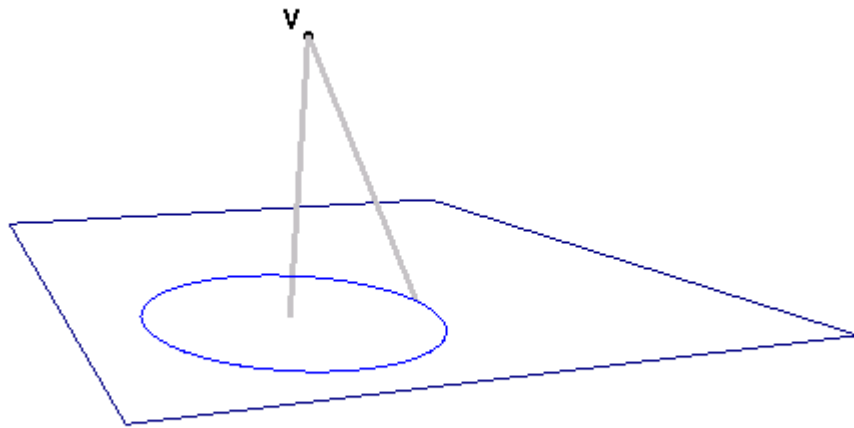


Fig. 1

rigide (di legno o metallo, rappresentate da segmenti) sono incernierate nel

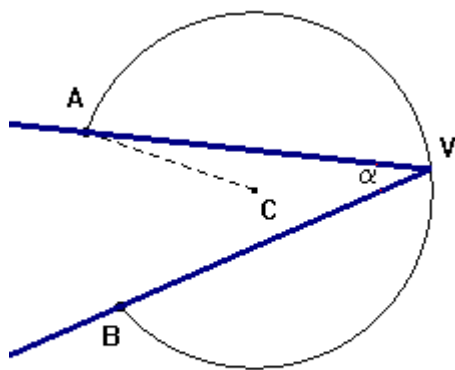


Fig. 2

comune estremo V, dove un dispositivo di blocco consente di fissare a piacere l'angolo da esse formato (apertura dello strumento), quindi il raggio della curva tracciata.

E' divertente proporre (a studenti con qualche nozione di geometria elementare) il problema di progettare un compasso che, mantenendo costante la propria apertura, disegni circonferenze (o archi di circonferenza) di raggio diverso. La soluzione (per noi ovvia) si vede in Fig. 2. Due perni A e B, fissati

perpendicolarmente al piano del disegno (su cui il compasso è adagiato) scivolano entro scanalature rettilinee incise nelle asticelle che formano l'angolo AVB, di ampiezza α assegnata e invariabile. Quando il vertice V viene sospinto con delicatezza, i perni guidano il moto dell'angolo: V descrive un arco di

circonferenza avente raggio r . Posto $AB = d$ si ha subito $d = 2r \sin \alpha$, perciò variando la distanza fra i perni si possono ottenere raggi diversi mantenendo α costante. Volendo completare la circonferenza, il compasso sarà modificato come in Fig. 3: quando il vertice V oltrepassa uno dei perni (A oppure B) il passaggio all'angolo supplementare garantisce la continuità del movimento.⁽¹⁾

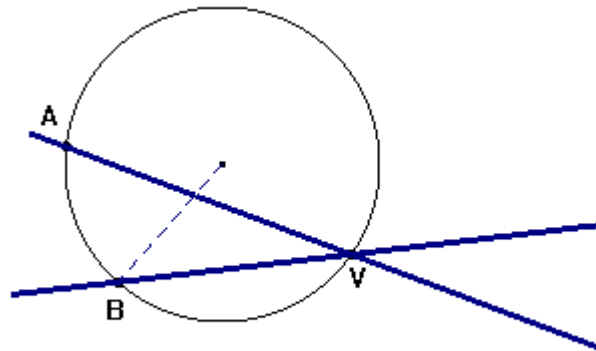


Fig. 3

Tutti gli strumenti considerati nei prossimi paragrafi avranno, come principali “organi di macchina”, coppie di asticelle scanalate e saldate fra di loro in modo da formare un angolo assegnato: esattamente come quelle con cui sono stati costruiti (con l’aggiunta dei perni A e B) i compassi di Fig. 2 e Fig. 3.

2. Coniche e angoli in movimento

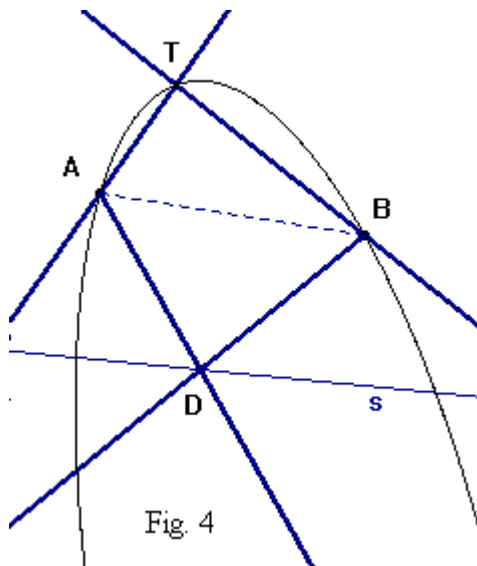
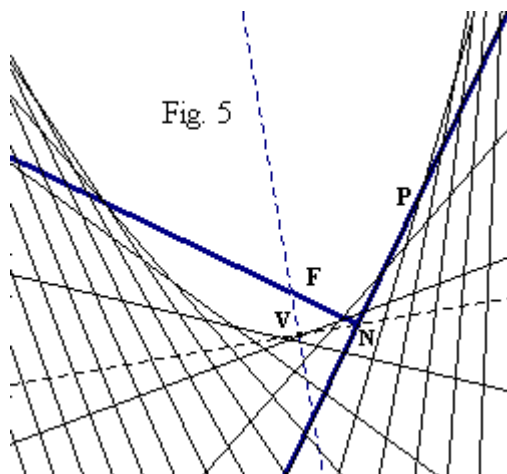


Fig. 4

Un metodo per generare coniche è esemplificato in Fig. 4.

Due angoli α e β , di ampiezza costante (dobbiamo immaginarli realizzati materialmente, in legno o metallo, e dotati di opportune scanalature) possono ruotare su un piano π attorno ai loro vertici, inseriti entro due perni A e B (fissati perpendicolarmente a π). I lati AT e BT si incontrano in T (punto tracciatore); gli altri due lati AD e BD si incontrano in D (punto direttore).

Se D si muove lungo una retta s a cui non appartengono né A né B e se gli angoli TAB e TBA non si annullano contemporaneamente durante il



movimento del sistema, allora il tracciante T descrive una conica (ellisse, iperbole o parabola secondo i valori di α e β e la posizione relativa di A, B, S).

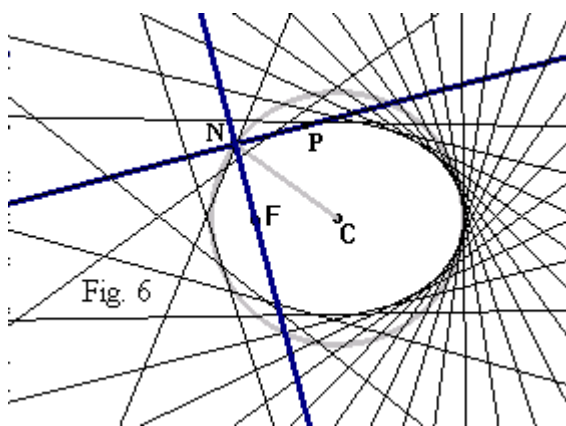
Di questo procedimento, studiato in modo esauriente da Newton e Mac Laurin, ci siamo già occupati⁽²⁾: prenderemo qui in esame altre proposizioni, in cui compaiono angoli che si muovono nel piano individuato da una conica.

Consideriamo una parabola e la retta (t) tangente ad essa in un suo punto

generico P. Tracciamo la perpendicolare a t uscente dal fuoco F della parabola: sia N la sua intersezione con t. Il luogo dei punti N (al variare di P) è una retta (tangente alla parabola nel vertice) nota come *podaria* della parabola rispetto al fuoco.

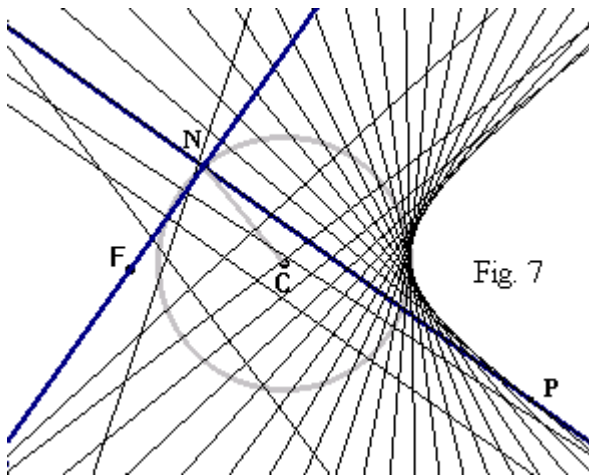
Se allora disponiamo di un angolo retto FNP e lo facciamo muovere nel proprio piano in modo che il lato FN (asticella dotata di scanalatura) passi per un perno fisso F mentre il vertice N sia obbligato a scorrere lungo una retta assegnata (non passante per F), il suo secondo lato NP si sovrapporrà in ogni istante ad una delle rette tangenti alla parabola di fuoco F e vertice V (essendo V il piede della normale condotta da F alla retta assegnata).

Così è possibile ottenere facilmente, per via meccanica, il fibrato tangente a una parabola: lo strumento (Fig. 5) guida il movimento di una retta anziché (come in Fig. 4) quello di un punto. E' anche possibile generare gli involuipi delle rette tangenti a una ellisse o a una iperbole, ricordando



che la podaria di una conica a centro rispetto a uno dei suoi fuochi è la circonferenza avente come raggio il semiasse maggiore della curva (ellisse) oppure il suo semiasse reale (iperbole). Cfr. Fig. 6 (caso dell'ellisse): la

manovella CN costringe il vertice dell'angolo a percorrere la curva podale.

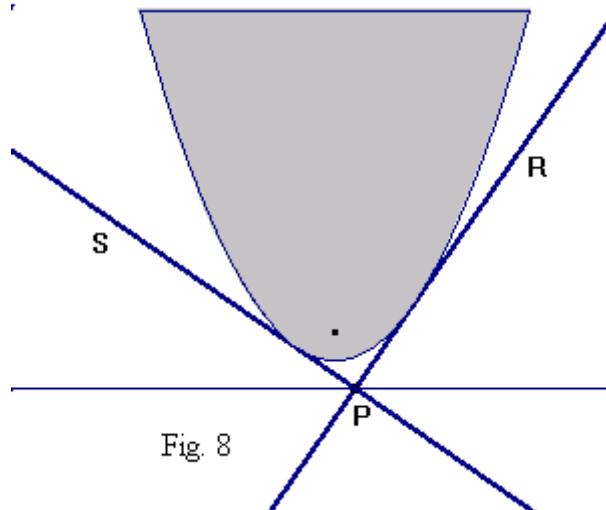


Nella Fig. 7 (che illustra il caso dell'iperbole) il fuoco F è esterno alla circonferenza di centro C.

Questi strumenti sono facili da costruire: occorre però che il perno C non sia impiantato sul piano del disegno, ma sorretto da un "ponte" al di sotto del quale l'angolo mobile FNP (uno solo dei suoi lati, quello che deve scorrere lungo il perno F, sarà dotato di scanalatura)

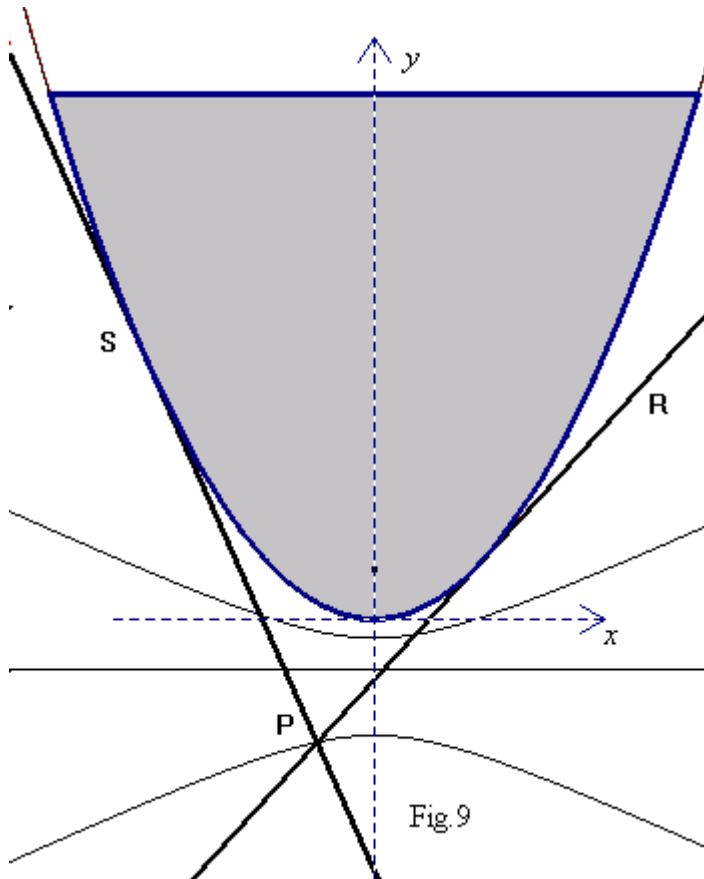
possa muoversi liberamente. Invece nelle simulazioni in Cabri i vincoli (puramente logico-geometrici) non creano ovviamente ostacolo alcuno.

Supponiamo ora di ritagliare, da un pannello di legno (dello spessore di 1 o 2 centimetri) un pezzo sagomato in modo che parte del suo contorno sia costituito da un arco di parabola; incolliamo questo pezzo sopra un altro pannello più grande, e su questo appoggiamo infine un angolo RPS di ampiezza α (costruito come al solito con asticelle di legno o metallo). Spingendo il vertice P, è possibile muovere l'angolo RPS mantenendo i suoi lati, in ogni istante, tangenti al bordo parabolico che sporge in rilievo. La curva descritta da P (identificato con l'occhio di un osservatore) è evidentemente il luogo dei punti dai quali il profilo parabolico è visto secondo l'angolo α (curva *isottica* della parabola; *ortottica* se $\alpha = 90^\circ$ come in Fig. 8).



Si ricava subito la verifica sperimentale di un noto teorema: le tangenti a una parabola perpendicolari fra loro si incontrano su una retta, e precisamente sulla

direttrice della parabola (detto in altri termini: le parabole hanno la propria direttrice come curva ortotica).



Se invece α non è un angolo retto, si può dimostrare che le curve isottiche di una parabola corrispondenti a valori supplementari di α sono costituite dai due rami di una medesima iperbole avente un fuoco e una direttrice rispettivamente coincidenti con il fuoco e la direttrice della parabola (Cfr. Fig. 9).

Diamo una traccia per la dimostrazione.

Nel sistema cartesiano indicato in Fig. 9, $y = ax^2$ è l'equazione della parabola assegnata,

$y - Y = m(x - X)$ la

equazione di una generica retta uscente dal punto $P(X, Y)$ del piano. Condizione di tangenza tra parabola e retta:

(I) $m^2 - 4amX + 4aY = 0$. Imponendo alle due tangenti uscenti da P di formare un angolo di ampiezza assegnata α , risulta $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ dove m_1

ed m_2 sono le radici della (I). Si ricava allora, tenendo anche conto delle relazioni tra radici e coefficienti in (I), che le coordinate di P devono

soddisfare alla relazione: $\tan \alpha = \frac{\sqrt{16a^2 X^2 - 16aY}}{1 + 4aY}$ (2). Elevando al quadrato

si ottiene $16a^2 X^2 - (16a^2 \tan^2 \alpha)Y^2 - 8a(2 + \tan^2 \alpha)Y - \tan^2 \alpha = 0$ (3).

La equazione (3) (che non cambia sostituendo ad α l'angolo supplementare)

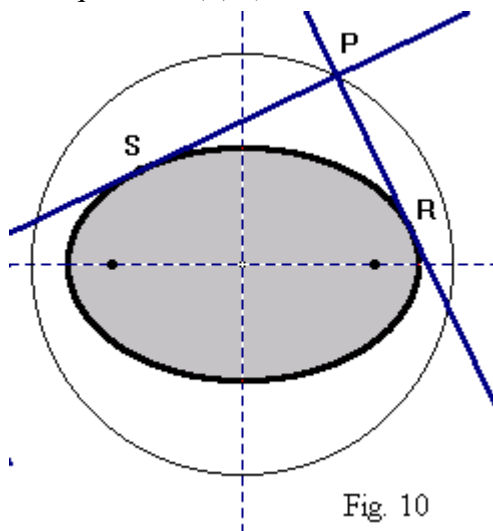


Fig. 10

rappresenta una iperbole avente con la parabola $y = ax^2$ un fuoco e una direttrice in comune. La (2) dice inoltre che se $\alpha = 90^\circ$, è $1 + 4aY = 0$: in tal caso dunque, come già osservato, P scorre sulla direttrice ($Y = -\frac{1}{4a}$) della parabola utilizzata nello strumento. Se invece $\alpha = 0$ si riottiene la parabola $y = ax^2$.

E' facile tracciare meccanicamente anche le ortottiche e le isottiche di ellissi con metodo analogo a quello appena descritto: usando cioè angoli

mobili e profili ellittici ritagliati da pannelli e incollati su superfici piane.

(Meno agevoli da disegnare, con questo procedimento, ortottiche e isottiche dell'iperbole).

L'ortottica di una ellisse è una circonferenza avente raggio uguale alla semidiagonale del rettangolo costruito sui semiassi della curva (noto anche come *cerchio di Monge*): quasi immediata la verifica empirica in Cabri (cfr. Fig. 10)

Invece le curve isottiche dell'ellisse (cfr. Fig. 11) sono quartiche bicircolari (costituite da due rami: uno generato dal vertice dell'angolo $RPS = \alpha$, l'altro dal vertice dell'angolo supplementare) appartenenti all'insieme delle *spiriche* ⁽³⁾ (sezioni piane di

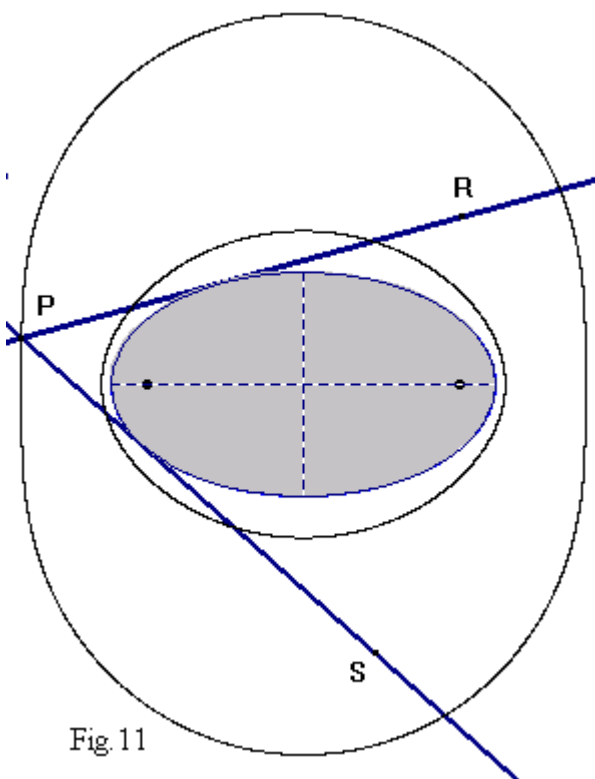


Fig. 11

superfici toriche). Qui i calcoli sono indispensabili: si ricava, per l'isottica dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la equazione:

$$(4) (X^2 + Y^2 - a^2 - b^2)^2 \tan^2 \alpha = 4(b^2 X^2 + a^2 Y^2 - a^2 b^2)^{(4)}.$$

La (4) non cambia sostituendo ad α l'angolo supplementare, quindi rappresenta entrambi i rami della curva.

Cogliamo l'occasione per rimarcare (in vista di possibili applicazioni didattiche) la profonda distanza che separa, anche dal punto di vista delle nozioni teoriche richieste, la costruzione di un meccanismo reale e quella del corrispondente oggetto virtuale. Per realizzare materialmente i curvigrافي delle Fig. 9 e 11 occorre soltanto la conoscenza di una definizione metrica delle coniche (allo scopo di ritagliare correttamente il bordo del pannello di legno con cui i lati dell'angolo mobile devono mantenersi in contatto): le simulazioni in Cabri richiedono invece (almeno) alcune informazioni sui diametri coniugati e sulle proprietà delle tangenti.

3. Un teorema di Mac Laurin

La generazione organica delle cubiche dotate di punto doppio viene affrontata

da Mac Laurin nella Sezione II del suo trattato⁽⁵⁾. Dalle proposizioni V, X, XIII egli ottiene il seguente

Corollario generale: “Nel piano siano dati due punti fissi C ed S (Fig. 12); dal punto S esca una retta SN che incontri in N un'altra retta NL sotto un angolo fisso assegnato α ; un secondo angolo $FCO = \beta$ di ampiezza costante abbia il proprio vertice in C e possa ruotare attorno a C ; sia inoltre P il punto di incontro tra CF ed NL , Q l'intersezione tra SN e CO . Se nel quadrilatero $CNQP$ due qualsiasi dei tre

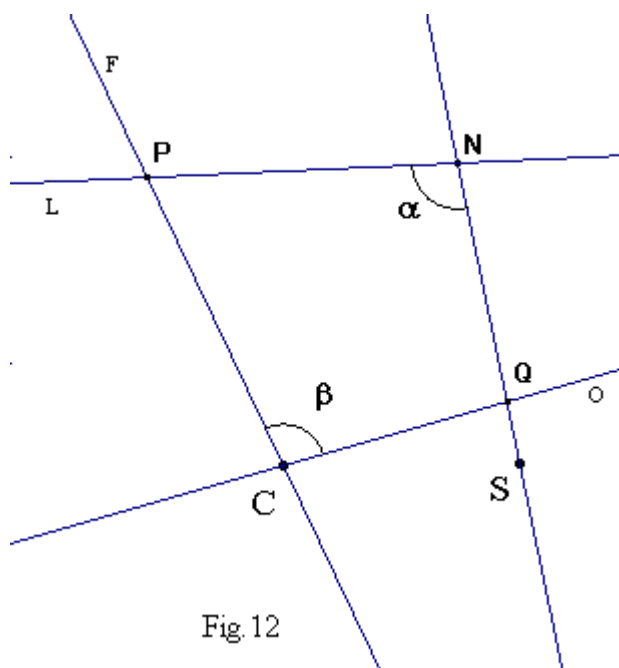


Fig. 12

punti Q , P , N sono spostati in modo da muoversi lungo due qualsiasi rette date

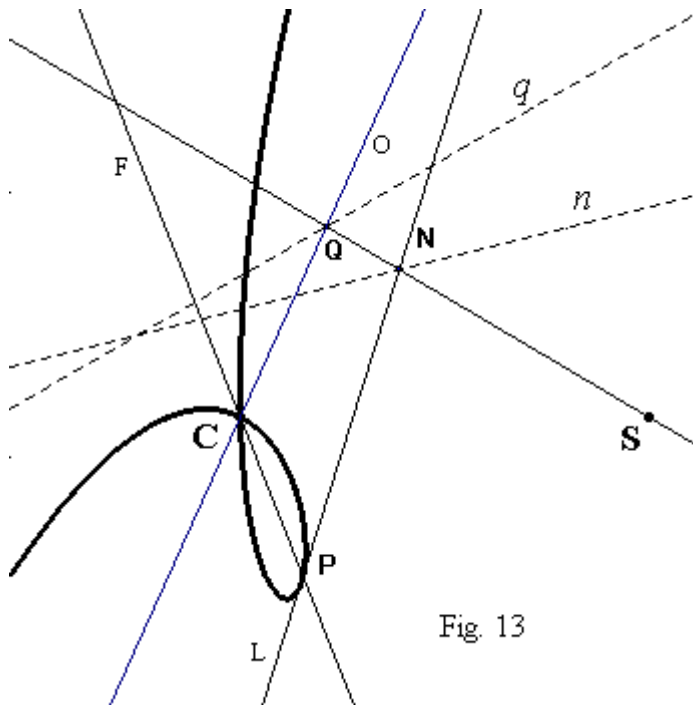


Fig. 13

in posizione, allora il terzo punto descriverà una cubica⁽⁶⁾ avente un punto doppio o in C o in S".

Mentre è abbastanza facile ricavare da questo enunciato curvigrati virtuali che tracciano cubiche dotate di singolarità, come si può osservare in Fig. 13 (dove il punto Q percorre la retta q e il punto N la retta n)⁽⁷⁾, non è affatto semplice tradurlo direttamente in meccanismi fisici.

D'altra parte Mac

Laurin (anche se ancora legato al carattere accentuatamente visivo e costruttivo acquistato dalla geometria delle curve durante i secoli a lui immediatamente precedenti) nelle sue ricerche sugli angoli in movimento si rivela poco interessato a realizzazioni strumentali concrete: mira soprattutto alla generalità dei risultati e alla codificazione di un metodo di lavoro. (Era ormai in atto una profonda trasformazione nello statuto teorico delle curve, divenute veri e propri oggetti matematici, mentre in passato venivano considerate principalmente come mezzi per risolvere problemi). Tuttavia, il metodo suggerito dal *Corollario generale* per disegnare cubiche singolari è suscettibile di notevoli

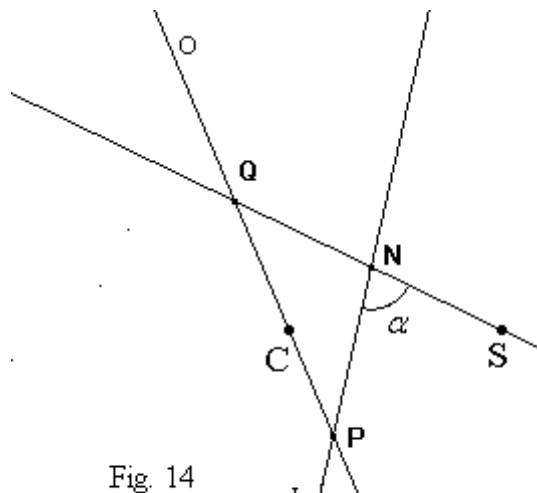


Fig. 14

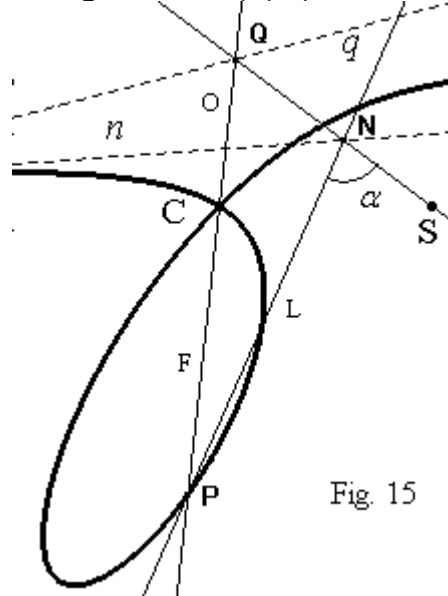


Fig. 15

semplificazioni e particolarizzazioni da cui si possono ricavare curvigrati di più agevole fabbricazione.

Mac Laurin stesso ci avverte, per esempio, che uno degli angoli α , β di Fig. 12 può essere piatto. L'enunciato allora (sia $\text{FCO} = \beta$ l'angolo piatto) si modifica come segue:

“Nel piano siano dati due punti fissi C ed S (Fig. 14); dal punto S esca una retta SN che incontri in N un'altra retta NL sotto un angolo fisso assegnato α ; una retta FCO ruoti attorno a C ; sia inoltre P il punto di incontro tra la semiretta CF ed NL , Q l'intersezione tra SN e la semiretta CO . Se nel triangolo NQP due qualsiasi dei tre punti Q , P , N sono spostati in modo da muoversi lungo due qualsiasi rette date in posizione, allora il terzo punto descriverà una cubica avente un punto doppio o in C o in S ”.

Si osservi il caso illustrato in Fig. 15: il punto N percorre la retta n , il punto Q

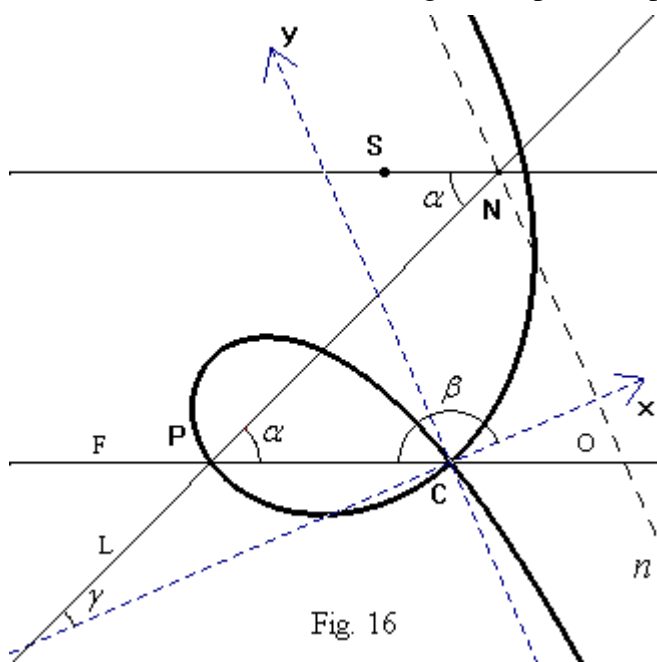


Fig. 16

percorre la retta q , e P descrive una cubica avente in C un nodo.

Supponiamo che la retta q diventi impropria. Se ciò si verifica, CO ruota attorno al perno fisso C mantenendosi sempre parallela al lato SN dell'angolo α (SN scorre vincolato al secondo perno fisso S).

Questo biellismo (Fig. 16) fu proposto da Heger nel 1909⁽⁸⁾, ed è costruibile senza notevoli difficoltà.

Il punto P descrive ancora una cubica. Volendo

ricavarne l'equazione, ecco una traccia per i calcoli. Il riferimento (ortogonale) è quello indicato in figura: asse delle ordinate parallelo alla retta n .

Le coordinate dei punti N ed S siano rispettivamente $(h; t)$, $(a; b)$; poniamo inoltre $\text{SNL} = \alpha$ (angolo costante), $\text{PCx} = \beta$ (angolo variabile).

Equazione della retta n : $x = h$

Equazione della retta SN: $(b-t)x + (h-a)y + at - hb = 0$.

Equazione della retta CP (parallela ad SN e passante per l'origine):
 $(b-t)x + (h-a)y = 0$. (5)

Equazione della retta NP: $(y-t) = (x-h) \tan \gamma$. Poiché $\beta = (180^\circ - \alpha) + \gamma$,
 risulta $\tan \gamma = \tan(\beta + \alpha)$. Poniamo $\tan \alpha = k$ e ricaviamo $\tan \beta$ dalla (4). Si ha:

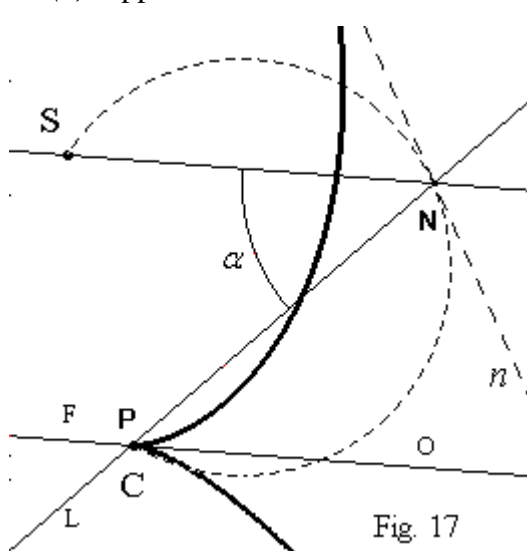
$\tan(\beta + \alpha) = \frac{(h-a)k + t-b}{(h-a) - k(t-b)}$. Perciò l'equazione della retta NP si scrive:

$y-t = \frac{(h-a)k + t-b}{(h-a) - k(t-b)}(x-h)$ (6). Intersecando quest'ultima con la retta (5)

si ottiene il luogo descritto da P:

$kx(x^2 + y^2) + k(a-h)y^2 + (b-hk)x^2 - (a+bk)xy = 0$ (7).

La (7) rappresenta una cubica circolare con punto doppio nell'origine.



La natura del punto doppio dipende dalla posizione dei punti fissi C ed N rispetto alla retta n (percorsa dal punto "pilota" N). Precisamente⁽⁹⁾: se la circonferenza passante per i punti C ed S e capace dell'angolo α (costruita, rispetto alla retta CS, nel semipiano contenente N) interseca la retta n si ha un nodo; se è tangente ad n si ha una cuspid; se non interseca n si ha un punto isolato. (Cfr. l'esempio di Fig. 17).

Da un punto di vista storico è interessante osservare che il metodo qui utilizzato per ricavare la (7) è

profondamente diverso da quello che Mac Laurin impiega per ottenere le equazioni delle cubiche generate da angoli in movimento. Egli infatti è ancora strettamente vincolato ai procedimenti di Euclide: cerca di individuare entro la configurazione geometrica in esame (aggiungendovi rette scelte in modo opportuno) triangoli che rimangano simili quando la configurazione stessa (il sistema meccanico) si deforma. Così, le proporzioni dedotte da quelle similitudini sono invarianti rispetto al movimento, e forniscono relazioni (incorporate nel meccanismo) che caratterizzano il luogo prodotto.

4. Podarie di parabola

Nei biellismi di Heger, l'aspetto della curva luogo ottenuta può essere cambiato agendo su uno dei seguenti parametri: distanza tra i perni C ed S; distanza tra C (oppure S) e la retta n ; direzione della retta n ; ampiezza dell'angolo α . Si ottiene comunque sempre una cubica circolare con punto doppio.

Nell'ipotesi che α sia un angolo retto, i calcoli per ricavare l'equazione (7) si semplificano (i coefficienti angolari delle rette SN ed NP sono antireciproci) e portano all'equazione:

$$(8) (x-h)(x^2+y^2) + (ay-bx)y = 0$$

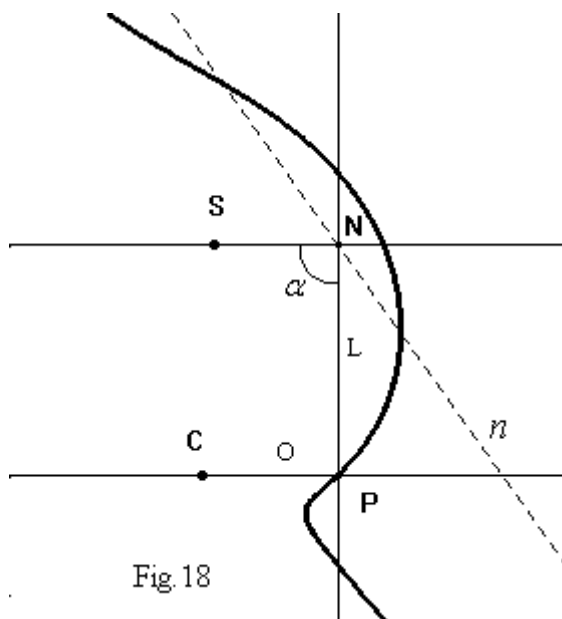


Fig. 18

che rappresenta una vasta classe di curve. Una di queste si può osservare in Fig. 18.

Dimostriamo che:

tutte le curve rappresentate dalla (8) sono podarie di una parabola (giacente in un piano π) rispetto a C (punto generico di π).

Infatti, per ciò che sappiamo (cfr. paragrafo 2), quando $\alpha = 90^\circ$ il lato NL dell'angolo mobile α inviluppa una parabola avente fuoco in S e parametro⁽¹⁰⁾ uguale al doppio della distanza tra S e la retta n (tangente alla parabola stessa nel vertice). Dal fatto che la retta CO (parallela a NS) è perpendicolare a NL, segue allora

che la sua intersezione P con NL descrive (mentre N si sposta su n) una podaria della parabola rispetto a C (Fig. 19).

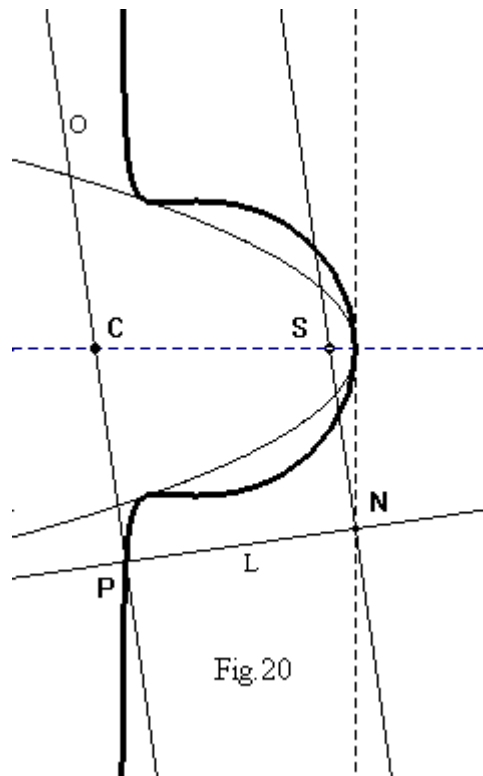


Fig. 20

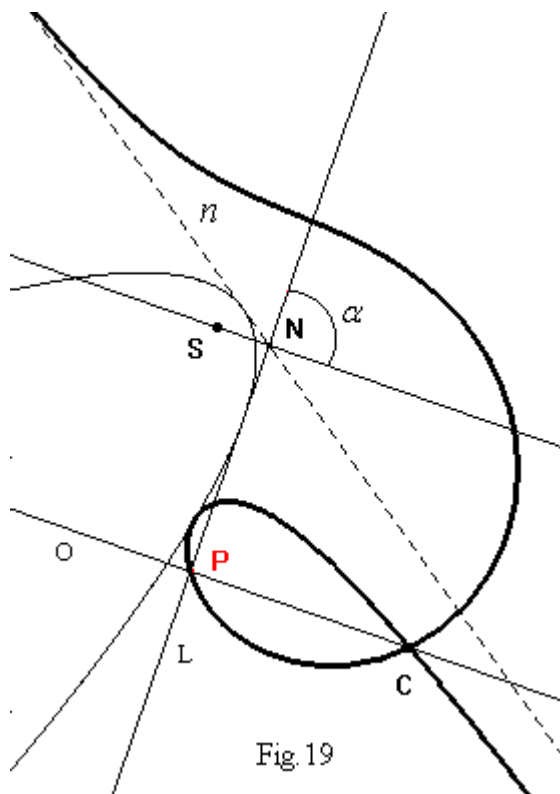


Fig. 19

Curve speciali notevoli (disegnabili tutte con il biellismo di Heger) si ottengono quando il punto C appartiene alla direttrice della parabola (*strofoidi*), o alla tangente nel vertice (*ofiuridi*), o infine all'asse della parabola. In quest'ultimo caso rientrano anche (cfr. Fig. 20) le *concoide di Sluse*, di cui già ci siamo occupati⁽¹¹⁾. Nei meccanismi virtuali il punto C si sposta facilmente: e così è possibile trasformare ognuna delle podarie di parabola in qualsiasi altra con deformazioni continue.

5. Le “squadre” di Newton

In particolare, se C coincide col punto di intersezione tra asse e direttrice della parabola, collocando il riferimento come in Fig. 16, cioè con origine in C e

asse delle ordinate parallelo alla retta n (tangente alla parabola nel vertice), seguendo lo stesso schema di calcolo che ha condotto alle equazioni (7) e (8), si ottiene

$x(x^2 + y^2) + p(x^2 - y^2) = 0$ (9), equazione della *strofoide retta*: deducibile

anche da (7) osservando che qui $h = -p$, $a = -2p$, $b = 0$ ($2p$ è la distanza tra fuoco e direttrice nella parabola). Cfr. Fig. 21: la curva è simmetrica rispetto all'asse x ; inoltre ha nel nodo (come tutte le strofoidi) rette tangenti tra loro perpendicolari.

Eseguiamo ora la seguente costruzione, suggerita dalle ricerche di Newton⁽¹²⁾ sulla generazione organica della

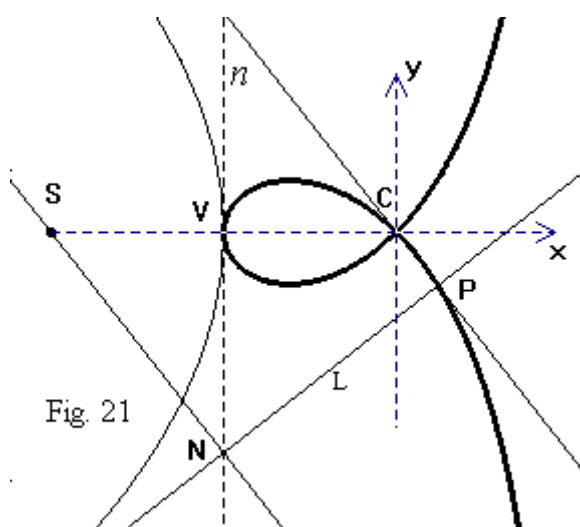


Fig. 21

strofoide retta. Prendiamo (Fig. 22) un punto generico Q sulla strofoide; tracciamo la retta v che lo congiunge a V (vertice della parabola e punto di contatto tra questa e la strofoide), poi la retta q normale a v in Q ; descriviamo infine la circonferenza di centro Q e raggio p ($AQ = QB = VC = p$), indicando con A e B le sue intersezioni con q .

Quali sono i luoghi descritti da A e da B mentre Q varia sulla strofoide? Una simulazione in Cabri ce li mostra subito (Fig. 23): ma informazioni più complete si hanno con semplici calcoli, per i quali diamo anche in questo caso una traccia (Il riferimento è invariato: asse delle ascisse coincidente con la retta VC , origine in C).

Equazione della retta VQ :

$$y = m(x + p).$$

Coordinate del punto Q :

$$(10) \quad \left(x = \frac{pm}{\sqrt{1+m^2}}, \right.$$

$$\left. y = pm\left(\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} + 1\right) \right).$$

Equazione della retta q :

$$y = -\frac{x}{m} + p(\sqrt{1+m^2} + m).$$

Quest'ultima retta si pone a sistema con la circonferenza

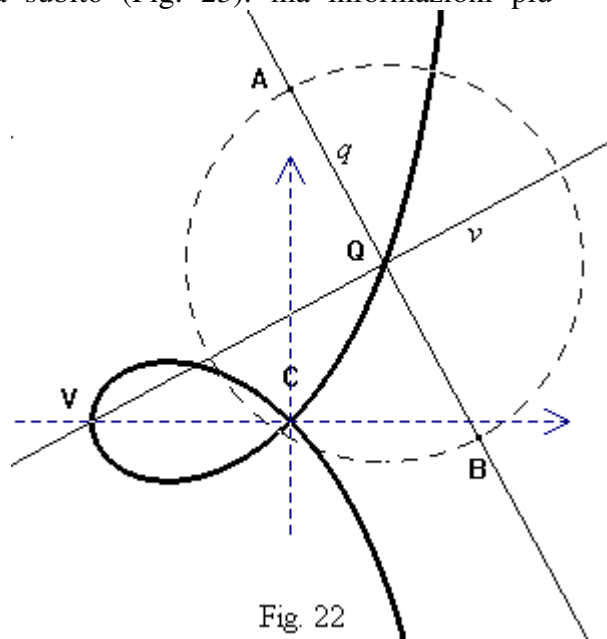


Fig. 22

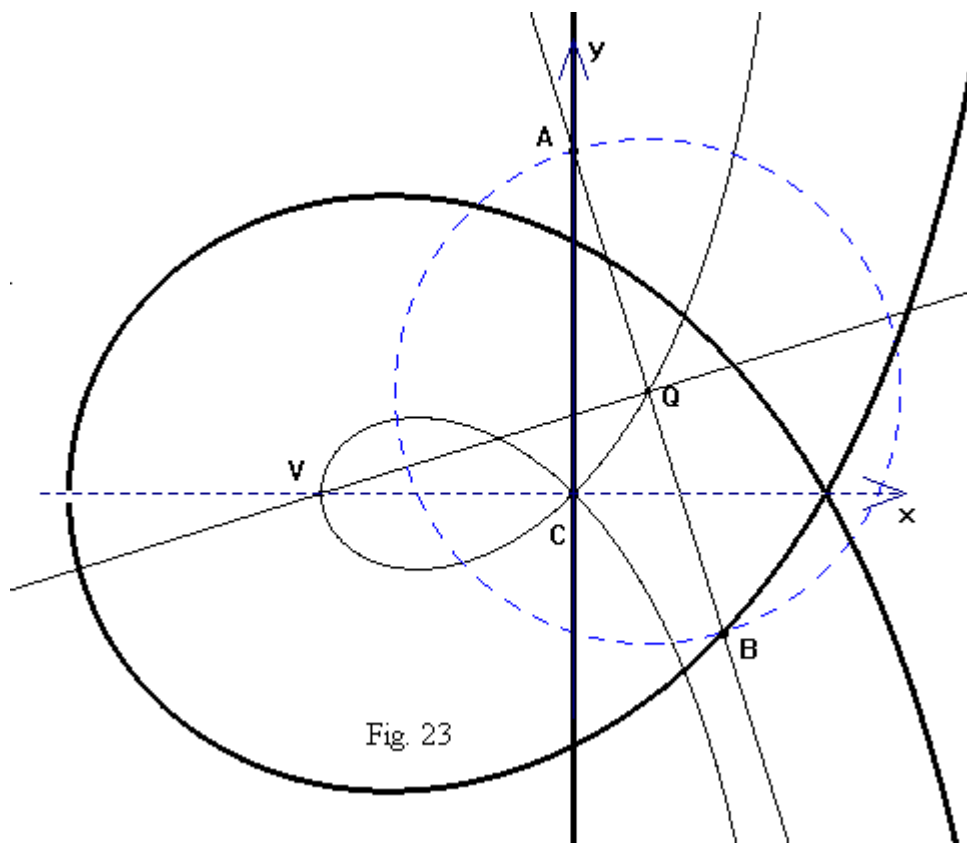


Fig. 23

$$\left(x - \frac{pm}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{pm^2}{\sqrt{1+m^2}} - pm\right)^2 = p^2, \text{ ottenendo: (11) } x=0 \text{ (ascissa}$$

$$\text{del punto A), (12) } x = \frac{2pm}{\sqrt{1+m^2}} \text{ (ascissa del punto B). La (11) ci dice che il}$$

luogo dei punti A è una retta coincidente con l'asse delle ordinate da noi prescelto; eliminando il parametro m tra la (12) e l'equazione della retta q (AQB) si ottiene dopo qualche passaggio l'equazione che rappresenta il luogo dei punti B: $x(x^2 + y^2) - 2py^2 - 3p^2x + 2p^3 = 0$ (13).

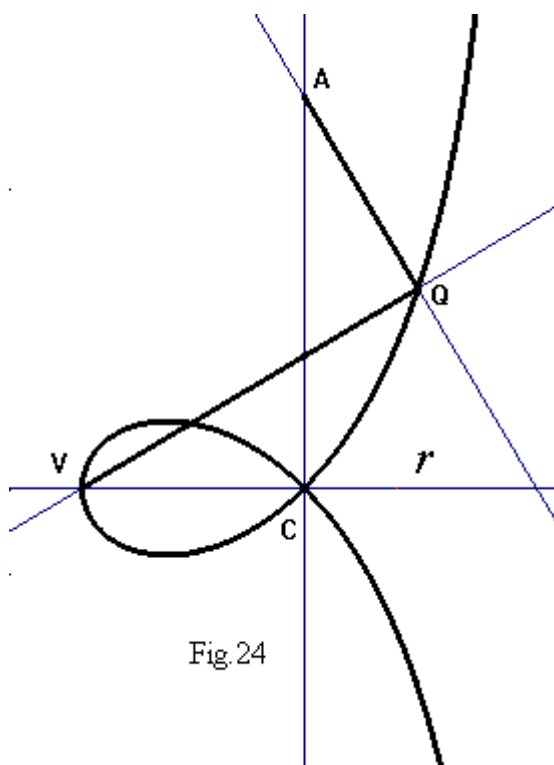


Fig. 24

Si tratta di una cubica circolare nodata (visibile in Fig. 23 insieme alla retta luogo dei punti A). Possiamo collocare il nodo nell'origine del sistema di riferimento mediante la traslazione $x = X + p$, $y = Y$; si ricava l'equazione $X(X^2 + Y^2) + p(Y^2 - 3X^2) = 0$, da cui appare che le tangenti nodali non sono perpendicolari: il luogo dei punti B non è una strofoide.

Le rette QA e QV delle Fig. 22 e 23 individuano una squadra, mobile nel piano della curva (il lato QV passa sempre per il punto fisso V): abbiamo finora supposto che nel suo movimento sia guidata dal punto Q, scorrevole sulla strofoide. Ma i calcoli eseguiti ci mostrano un altro modo di

“pilotarla”, utilizzando il punto A: facendo percorrere a questo la retta perpendicolare a CV in C, il vertice Q descriverà la strofoide.

Possiamo allora (seguendo le indicazioni di Newton) fabbricare un semplice strumento per la generazione organica di una strofoide retta. Sia data in un piano π (Fig. 24) una retta r qualsiasi; presi su questa due punti V e C (aventi distanza VC assegnata), si incida su π una scanalatura in direzione perpendicolare ad r e passante per C. Si costruisca poi (con aste di legno o di

metallo) una squadra: ne sia Q il vertice. Fissato su uno dei suoi lati un perno A tale che $QA = VC$, si faccia scorrere A nella scanalatura perpendicolare ad r , costringendo contemporaneamente l'altro lato della squadra a passare per un perno collocato in V. La squadra si muoverà allora su π , e il vertice Q traccerà la strofoide retta.

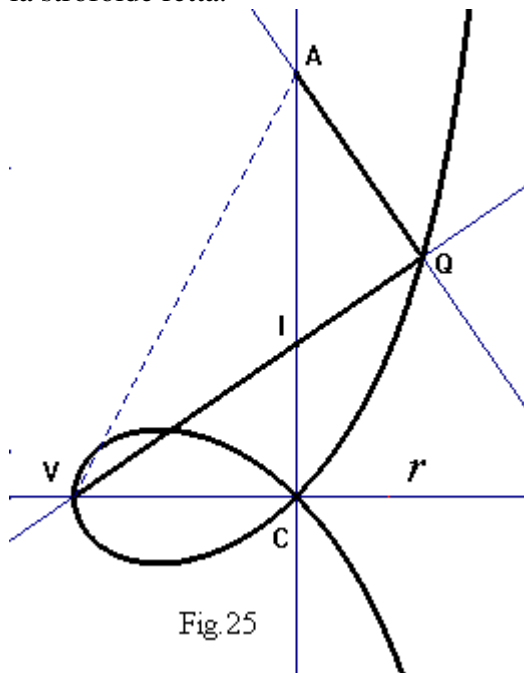


Fig. 25

Questo strumento (*Squadra di Newton*) mette in evidenza (e incorpora) una proprietà geometrica notevole della strofoide retta (comune a tutte le strofoidi)⁽¹³⁾: basta infatti tracciare il segmento VA e indicare con I l'intersezione dei cateti AC e VQ per dedurre subito, dalla ovvia uguaglianza dei triangoli rettangoli VAC e VAQ, che $IQ = IC$ (cfr. Fig. 25).

Con la Squadra di Newton si tracciano numerose altre curve.

Già sappiamo, infatti, che il simmetrico di A rispetto a Q descrive la (13): ma si dimostra facilmente (e si verifica subito utilizzando Cabri) che *ogni punto* della retta AQ traccia una cubica circolare. In particolare,

Newton stesso ha osservato che il punto medio M tra A e Q disegna (cfr. Fig. 26) una *cissoide retta* (o *cissoide di Diocle*): curva definita anche come podaria di una parabola rispetto al vertice (punto d'intersezione tra la parabola stessa e il proprio asse).

Per ottenere l'equazione cartesiana della cissoide retta (il riferimento è indicato in Fig. 26 e coincide con quello delle Figg. 21, 22, 23) si ricavano dalle coordinate di A e Q (già note: cfr. (10) e (11)) quelle di M, che scriviamo in questa forma:

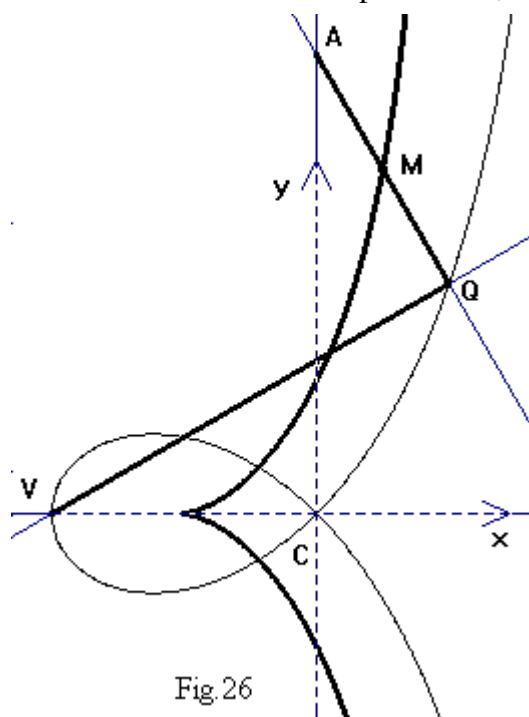


Fig. 26

$$2x = \frac{pm}{\sqrt{1+m^2}}, \quad 2y = \frac{p(1+2m^2)}{\sqrt{1+m^2}} + 2pm.$$

Eliminando il parametro m :

$$(14) \quad 4y^2(p-2x) = (p+2x)^3.$$

L'equazione (14), con la traslazione $x = X - \frac{p}{2}$, $y = Y$ diventa:

$X(Y^2 + X^2) - pY^2 = 0$, da cui appare subito che si tratta di una cubica circolare con cuspidi nell'origine.

6. La curva Kappa

Nella Sezione III del suo trattato, Mac Laurin prosegue le ricerche di geometria organica affrontando la generazione (mediante angoli in movimento) delle quartiche e delle cubiche prive di punti multipli: (un problema, quest'ultimo, che Newton classificava "*tra quelli di più difficile soluzione*")⁽¹⁴⁾. Dopo di lui, numerosi altri geometri (almeno fino ai primi decenni del Novecento) hanno studiato curvigrati in cui gli angoli figurano come fondamentali "organi di macchina".

La rassegna iniziata nei paragrafi precedenti potrebbe quindi proseguire a lungo, estendersi in più direzioni. Abbiamo scelto di chiuderla descrivendo un meccanismo, notevole per la sua semplicità, che non è legato (come quelli analizzati nei paragrafi 3, 4 e 5) né alle cubiche, né alle podarie di parabola. Ci affacciamo così a regioni più vaste, a nuovi terreni di esercizio.

Sia data (Fig. 27) una retta r e su questa un punto fisso (perno) O . Un angolo

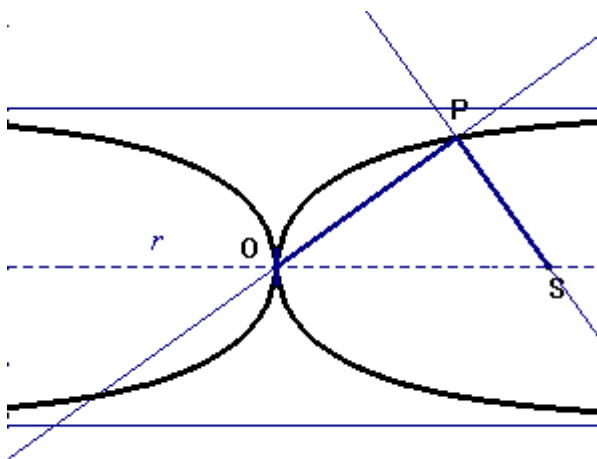


Fig.27

retto OPS (mobile in un piano per r) ha uno dei suoi lati vincolato a passare per O ; sull'altro lato un punto S (a distanza assegnata e costante da P) scivola lungo la retta r . In queste condizioni, il vertice P dell'angolo retto descrive una quartica circolare razionale (l'origine è un tacnodo) nota come *curva kappa*⁽¹⁵⁾ per la sua somiglianza con la decima lettera dell'alfabeto greco.

E' facile determinarne

l'equazione (Fig. 28): sia (15) $(x-k)^2 + y^2 = a^2$ la circonferenza avente raggio costante a e centro nel punto $S(k, 0)$ (variabile sulla retta r , assunta come asse delle ascisse);

sia inoltre (16)

$$(x - \frac{k}{2})^2 + y^2 = (\frac{k}{2})^2 \quad \text{la}$$

circonferenza passante per l'origine con centro in M , punto medio del segmento (variabile) OS . Eliminando k tra (15) e (16) si ottiene subito:

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

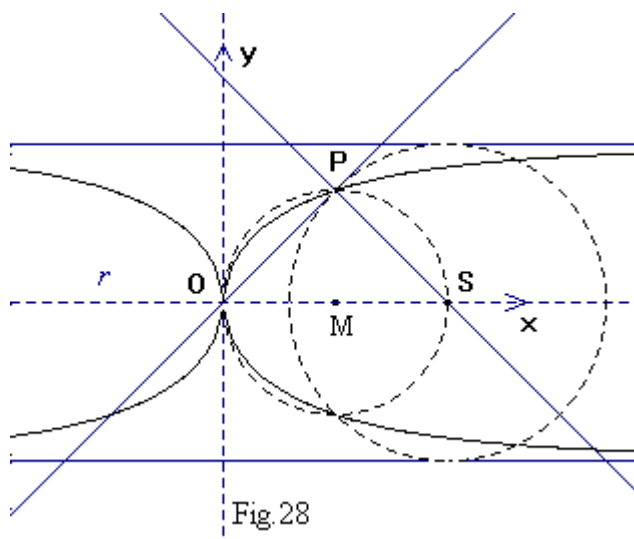


Fig. 28

⁽¹⁾ Chi fabbrica lo strumento dovrà curare che la saldatura delle due aste in V non ostacoli il passaggio dei perni fissi A e B. Si noti a questo proposito: è sufficiente che una sola delle due aste sia scanalata in tutta la sua lunghezza (la circonferenza sarà allora interamente percorribile in un verso determinato).

⁽²⁾ Cfr. Pergola, Zanoli, Martinez, Turrini: Modelli fisici per la matematica: conicografi flessibili, in *Progetto Alice*, Vol. III, n° 9, 2002.

⁽³⁾ Cfr. M. Pergola, M. Maschietto, Modelli fisici per la matematica: biellismi del Peaucellier e del Delaunay, in *Progetto Alice*, Vol. IV, n° 11, 2003 (dove si considerano tuttavia soltanto le spiriche ottenute con piani secanti paralleli all'asse del toro).

⁽⁴⁾ Si segue il medesimo procedimento utilizzato per ricavare l'equazione dell'isottica di una parabola generica. Dalla (4), per $\alpha = 0$ (oppure $\alpha = 180^\circ$), si riottiene l'ellisse di partenza; mentre per $\alpha = 90^\circ$ si ha l'ortottica $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

⁽⁵⁾ Cfr. C. Mac Laurin, *Geometria Organica: sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis*, London, 1720

⁽⁶⁾ Mac Laurin non usa il termine "cubica": parla di "linee del terzo ordine".

⁽⁷⁾ Qualche volta però il risultato delude: gli archi visibili del luogo prodotto non riescono a presentarcelo in modo sufficientemente preciso nel suo aspetto e nelle sue caratteristiche. E' proprio Mac Laurin a spiegarci una delle ragioni di questo fatto: si dovrebbero usare nella loro

totalità le “rette di scorrimento” su cui devono muoversi i punti “pilota”. Ciò è evidentemente impossibile (anche a un computer, che opera sempre su insiemi finiti).

⁽⁸⁾ Cfr. R. Heger, *Zur Konstruktion von Kurven 3 Ordnung*, Abhandlungen Gesell. Isis, 1909

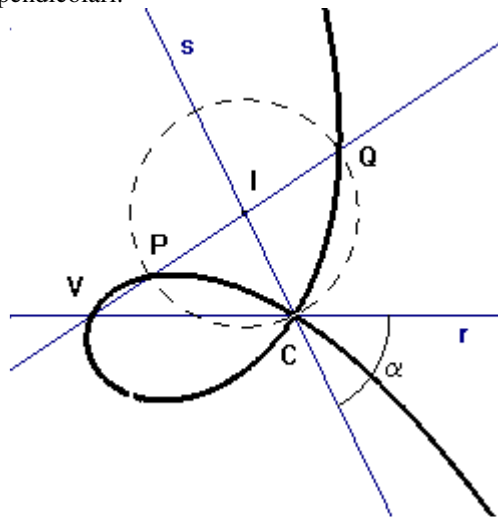
⁽⁹⁾ Cfr. Mac Laurin, *op. cit.*, Sezione II, Prop. V, Corollari I, II, III, IV, V.

⁽¹⁰⁾ Intendiamo qui come *parametro* di una parabola la distanza tra fuoco e direttrice.

⁽¹¹⁾ Cfr. M. Pergola, M. Maschietto, Modelli fisici per la matematica: biellismi del Peaucellier e del Delaunay, in Progetto Alice, Vol. IV, n° 11, 2003.

⁽¹²⁾ Cfr. per esempio I. Newton, *Aritmetica Universalis*, London 1707.

⁽¹³⁾ Diamo qui la definizione generale di strofoide (controllare sulla figura allegata). Siano date due rette s ed r , fissate in posizione, formanti tra loro un angolo α di vertice C . Si prenda su r un punto V tale che $VC = \text{costante}$, e da V si faccia uscire una terza retta che ruoti attorno a V e intersechi in I la retta s . Siano Q e P le intersezioni tra la retta VI e la circonferenza di raggio (variabile) IC . La curva descritta dai punti P e Q (mentre VI ruota attorno a V) è una strofoide. La strofoide è retta se α è un angolo di 90° . In ogni caso la curva ha un nodo in C . Da questa definizione si deduce facilmente (per via geometrica o attraverso il calcolo) che le tangenti nodali sono tra loro perpendicolari.



⁽¹⁴⁾ Cfr. I. Newton, *Enumeratio linearum Tertii Ordinis*, London, 1704 – 1711

⁽¹⁵⁾ Curva studiata da R. De Sluse. Cfr. lettera a C. Huygens del 18/8/1662, in Chr. Huygens, *Oeuvres complètes* 4, La Haye 1891