

Pergola, M. & Maschietto, M. (2004), 'Modelli fisici per la matematica: ruote e curve', *Progetto Alice*, vol.V, n°14 – II, pp. 447 – 470.

Modelli fisici per la matematica: ruote e curve¹

**Marcello Pergola
Michela Maschietto**

Riassunto. Su un piano fisso assegnato consideriamo una circonferenza (nei meccanismi fisici una ruota in legno, metallo o altri materiali) che rotoli senza strisciare lungo una guida (rettilinea o ricurva) immobile in tale piano. Immaginiamo che la circonferenza mobile trascini nel suo movimento un altro piano, vincolato rigidamente ad essa. Utilizzando il moto relativo dei due piani è possibile descrivere molti luoghi geometrici di notevole importanza storica. Sono qui esaminati i casi più semplici.

Abstract. In this paper, we studied the following situation: on a plane, a circumference (on the devices this was a wooden or metal wheel, for example) was rolled without dragging along a rail that was immovable on this plane; the mobile circumference dragged another plane that was rigidly bound to it. Using the respective movement of the two planes, it was possible to describe several geometric loci that are important from historical point of view. Here we studied the simplest cases.

Marcello Pergola
per.non@libero.it

Michela Maschietto
maschietto.michela@unimore.it

¹ Lavoro eseguito nell'ambito del progetto COFIN03 n. 2003011072

1. Cicloidi

Un *disco circolare* ⁽¹⁾ di raggio r rotola senza strisciare sulla rotaia rettilinea s (*base*), mantenendo le sue due facce circolari parallele a una giacitura assegnata (Fig. 1). Il disco trasmette il proprio movimento al piano σ individuato dalla sua faccia anteriore e a questa unito rigidamente. Davanti a σ (rappresentato in figura dal rettangolo $abcd$) è collocato un altro piano π : immobile, trasparente, parallelo a σ .

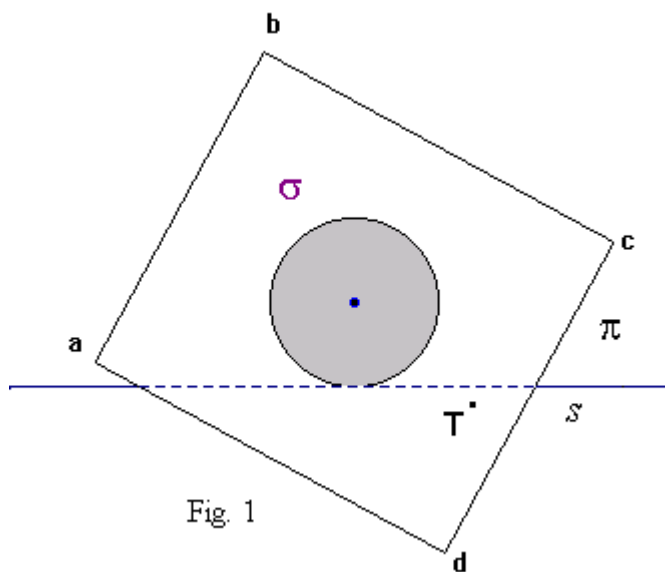


Fig. 1

a piacere) si inserisca un tracciatore (pennarello, matita, o simili) curando che la punta scrivente T tocchi il piano immobile π . Quando la ruota cilindrica è in moto, il tracciatore (guidato da σ) disegna su π una curva (traiettoria) nota col nome di *cicloide*.

Il meccanismo (non è opportuno fornirne qui una descrizione tecnica più dettagliata) può essere simulato in Cabri ⁽²⁾: trascinando col mouse il centro del disco, si osserva il movimento simultaneo del tracciatore e di σ (rettangolo $abcd$); chiedendo il luogo dei punti T , ap-

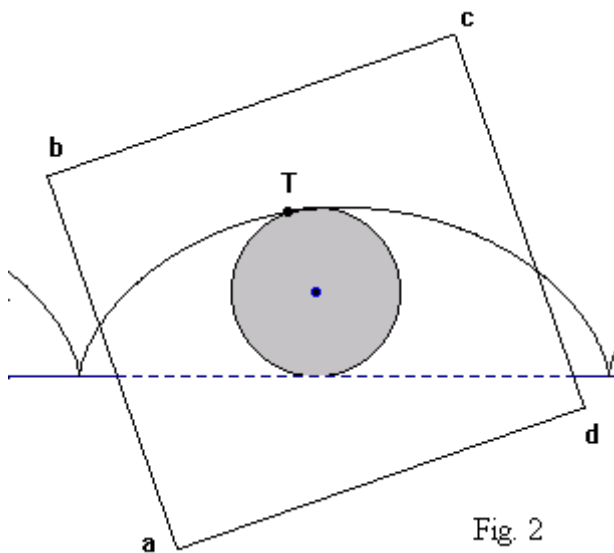


Fig. 2

pare la curva generata.

Si distinguono tre casi:

- La distanza tra il punto T e l'asse della ruota (disco) è uguale al raggio r di questa. Si ha la curva di Fig. 2 (*cicloide ordinaria*).

- La distanza tra il punto T e l'asse del disco è minore di r . Si ha la curva di Fig. 3 (*cicloide accorciata*).

- La distanza tra il punto T e l'asse del disco è maggiore di r . Si ha la curva di Fig. 4 (*cicloide allungata*).

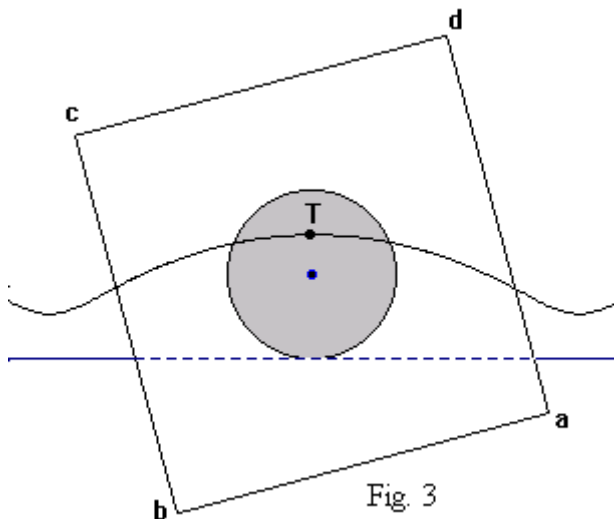


Fig. 3

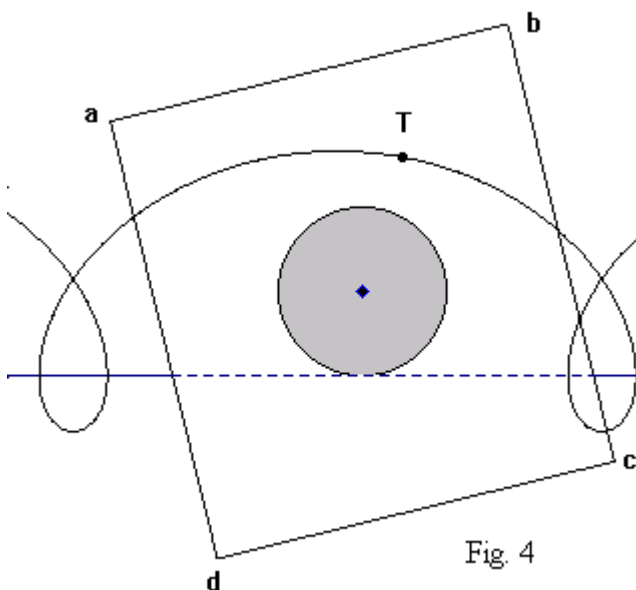


Fig. 4

Le cicloidi si riproducono periodicamente: sono cioè costituite da infinite parti fra loro identiche (sovrapponibili), ognuna delle quali corrisponde a un giro completo della ruota che le genera. La cicloide ordinaria ha infinite cuspidi, quella allungata infiniti nodi, quella accorciata infiniti punti di flesso. Poiché il segmento compreso fra due cuspidi consecutive (oppure: fra due nodi con-

secutivi; fra due flessi consecutivi in cui le rette tangenti abbiano la stessa pendenza) ha lunghezza uguale alla circonferenza di raggio r (raggio del disco generatore), queste curve consentono di rettificare per via empirica qualunque circonferenza.

Le cicloidi hanno avuto (a cominciare dal XVII secolo) una storia complessa e interessante⁽³⁾. Inizialmente studiate da G.Galilei, E.Torricelli,

R.Descartes, furono poi riprese in esame da B.Pascal, G.P. de Roberval, G.W.Leibniz, C.Wren, G.Bernoulli (che affrontarono in particolare problemi di rettificazione degli archi di cicloide e di quadratura delle superfici comprese fra tali archi e la base) ⁽⁴⁾. Importanti e numerose furono le applicazioni: da quelle di Huyghens relative alla misura del tempo (orologio a pendolo) fino a quelle più recenti, relative alla trasmissione del movimento (costruzione di ingranaggi) ⁽⁵⁾.

E' facile ricavare le equazioni parametriche di una cicloide. Infatti nel riferimento di Fig. 5 (l'origine O si trova nel punto di partenza della ruota; B indica il punto di contatto

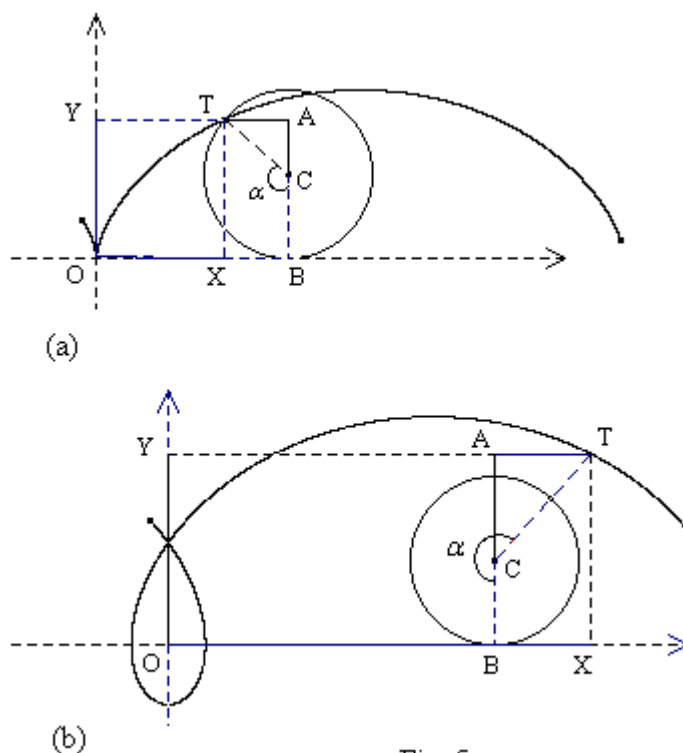


Fig. 5

con la base dopo una rotazione di ampiezza $TCB = \alpha$ radianti; OB è la distanza percorsa dalla ruota) risulta (posto $CB = r$) $OB = r\alpha$. Quindi, ponendo $d = CT$ e indicando con x, y le coordinate di T:

$$\begin{cases} x = r\alpha - d \sin \alpha \\ y = r - d \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{in Fig. 5a } \sin \alpha \text{ è positivo, in Fig. 5b negativo; } \cos \alpha \text{ è}$$

negativo in entrambi i casi). Le equazioni valgono anche per $d < r$ (cicloide accorciata).

Aggiungiamo due osservazioni.

- Riprendiamo in esame la Fig. 1, e supponiamo che i piani π e σ siano verticali: l'aderenza tra disco e base è in tal caso assicurata dalla forza di gravità. Ma se la situazione è quella di Fig. 6 (è stata eseguita una simmetria

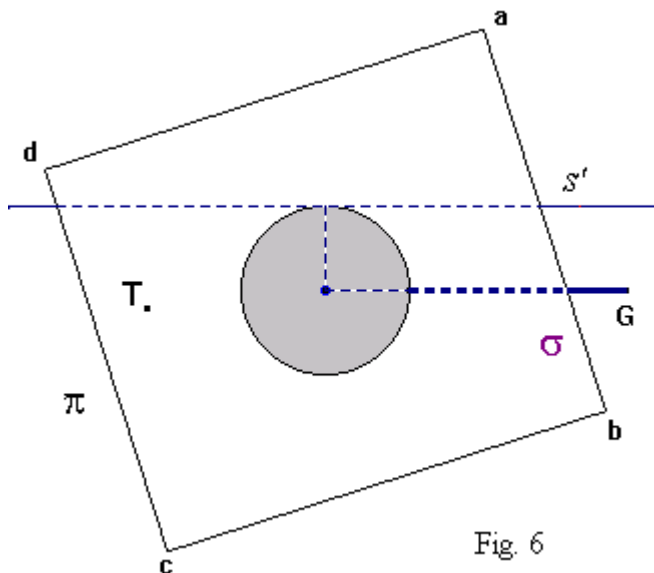


Fig. 6

rispetto ad S) si deve ricorrere per esempio a un sistema di molle: il verso di rotazione, procedendo da sinistra a destra o viceversa, risulta invertito rispetto a quello di Fig. 1; il meccanismo (messo in moto tirando o spingendo la barra G), produrrà cicloidi disposte come in Fig. 7.

- Si consideri la Fig. 8, dove i tracciatori T , R , S (corrispondenti ai vari tipi di cicloide) sono stati

scelti sul medesimo raggio. Supponiamo che il disco esegua un giro completo: in tal caso lo spostamento del suo centro C è rappresentato dal segmento CO (lunghezza della circonferenza descritta dal tracciatore T , che genera la cicloide ordinaria). Ma *nel medesimo intervallo di tempo* il tracciatore R (che genera la cicloide accorciata) descrive la circonferenza di lunghezza $CA < CO$, mentre il tracciatore S (che genera la cicloide allungata) ne descrive un'altra di lunghezza $CB > CO$. Ciò rende intuitivo il seguente enunciato (che si potrebbe dimostrare rigorosamente):

Se un cerchio Γ rotola (senza strisciare) su una retta S con moto uniforme, e se contemporaneamente S scorre su se stessa con moto uniforme, un punto T della circonferenza di Γ descrive una cicloide accorciata se S scor-

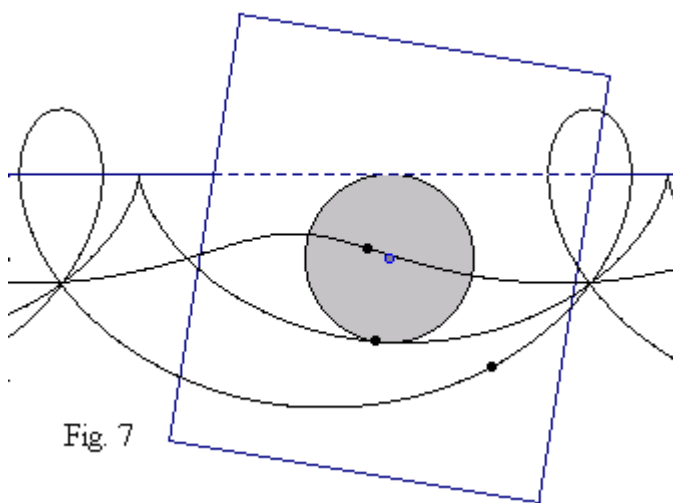


Fig. 7

re nel medesimo verso in cui rotola la circonferenza, una cicloide allungata nel caso contrario.

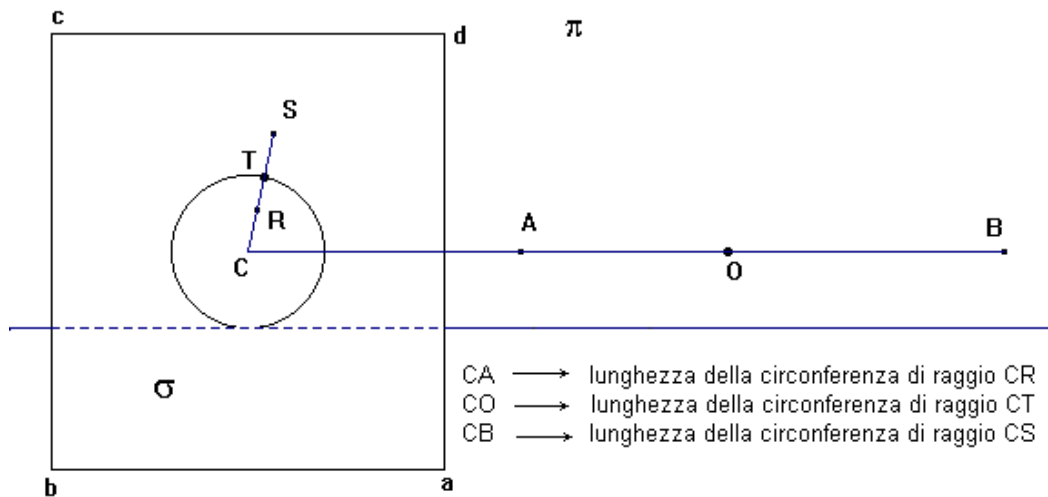


Fig. 8

Infatti con questa tecnica (movimento simultaneo della base s e della ruota) si può costringere il punto C a trovarsi, dopo un giro completo della ruota, in A oppure in B anziché in O : in tal modo T (che appartiene alla circonferenza della ruota) descriverà rispettivamente cicloidi allungate o accorciate, entrambe tangenti alla retta base s .

Si noti che nel teorema appena enunciato compare il concetto di velocità, che invece non interviene nella definizione originaria delle cicloidi (Fig. 1 e 5).

2. Spirale di Archimede

Al concetto di velocità si fa riferimento anche nella seguente definizione: se una retta ruota in un piano con velocità angolare ω costante attorno a un punto fisso O , mentre un punto S , partendo da O , la percorre con velocità v pure costante, la traiettoria descritta da S dicesi *spirale di Archimede* ⁽⁶⁾.

Dalla definizione, utilizzando un sistema di coordinate polari $(\rho; \alpha)$ di origine O (l'asse polare si può far coincidere con la posizione iniziale della

retta che gira attorno ad O si ricava immediatamente (essendo $\rho = vt$, $\alpha = \omega t$):

(1) $\rho = k\alpha$, dove k (rapporto tra la velocità di S sulla retta e la velocità angolare di questa) è una costante che si può supporre positiva.

Poiché due sono i versi di rotazione possibili (fra loro opposti) la spirale possiede (infiniti) punti doppi allineati sulla perpendicolare condotta dal polo all'asse polare.

Dalla (1) si ricava che i due movimenti (quello di rotazione della retta attorno ad O e quello del punto S sulla retta) non devono necessariamente essere uniformi: occorre soltanto che siano sincronizzati in modo tale da rendere costante nel tempo il rapporto tra le loro velocità. Ci si può convincere di ciò anche costruendo la curva al computer come luogo geometrico. In Fig. 9 per esempio si è utilizzato Cabri II, riportando la lunghezza AL (variabile sul segmento AB) sia sulla circonferenza di centro C (a partire da un

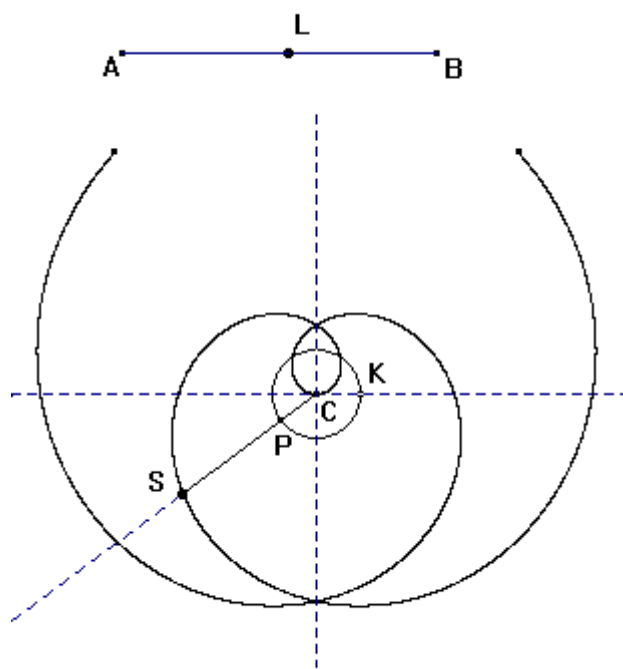


Fig. 9

punto prefissato K, generando l'arco KP) sia sulla semiretta CP (a partire dalla origine C, generando il segmento CS). Quando L scorre su AB (con velocità variabile qualsiasi) P ed S cambiano insieme la loro posizione (rispettivamente sulla circonferenza di centro C e sulla semiretta CP): S descrive la spirale di Archimede.

In una memoria del 1740, A.C.Clairaut insegna a tracciare questa celebre curva (legata al problema della quadratura di un cerchio) con un movimento del tutto simile a quello che produce la cicloide. Il suo metodo, che ora descriveremo, può essere facilmente trasformato in una definizione della spirale di Archimede in cui il concetto di velocità non ha più ruolo alcuno ⁽⁷⁾.

Si riprenda in esame la Fig. 1, e si immagini che il tracciatore, anziché essere ancorato al piano ruotante σ , sia vincolato rigidamente al piano fisso

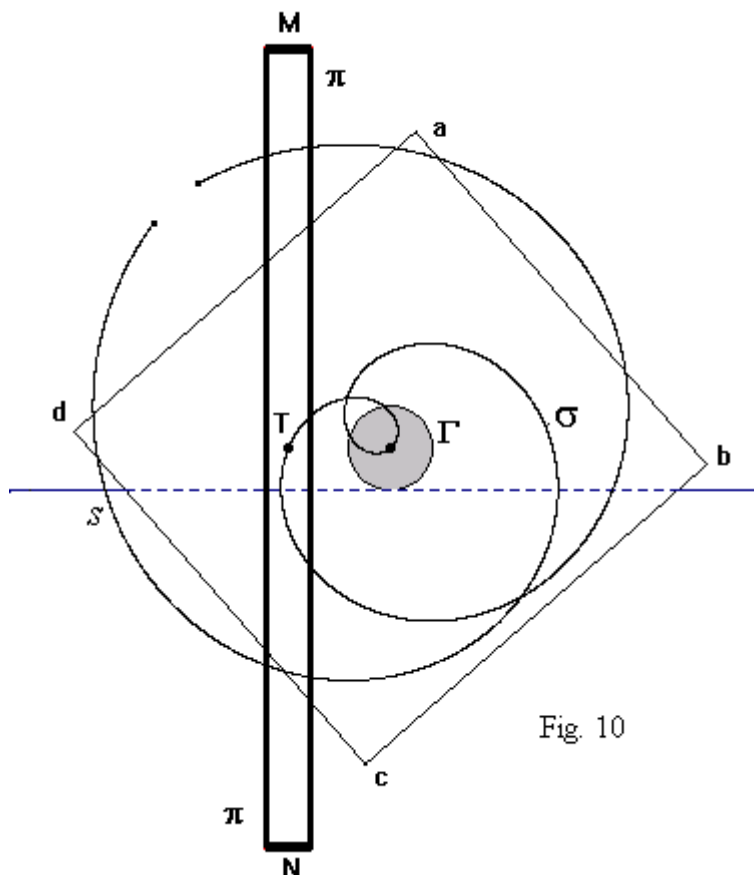


Fig. 10

π , in modo che la sua punta scrivente T (immobile) scorra su σ . In questa situazione la punta T traccia su σ una spirale di Archimede, purché la distanza fra T e la base s sia uguale al raggio r della ruota che fa muovere σ . Se quest'ultima ipotesi non è soddisfatta, si ottengono spirali di tipo diverso, come vedremo tra poco.

Nella Fig. 10 si può vedere la macchina di Clairaut: un piano σ ,

(nel modello fisico, una lastra $abcd$) trascinato dalla ruota Γ , si muove al di sotto del ponte MN ancorato al piano (immobile) π . Il tracciatore T, che è sostenuto dal ponte MN e ha dalla base s una distanza uguale al raggio r di Γ , disegna la spirale. Nel modello fisico (o nella sua simulazione in Cabri) la spirale, *pretracciata su σ* , ruota insieme a Γ e passa sempre per il punto fisso T.

Supponiamo che nell'istante iniziale t_0 il centro di Γ coincida con T; si scelga sulla circonferenza della ruota Γ un punto R; dopo un intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_0$ la distanza ρ fra T e il centro di Γ è uguale all'arco descritto da R nel medesimo intervallo di tempo. Quindi, vale ancora la (1).

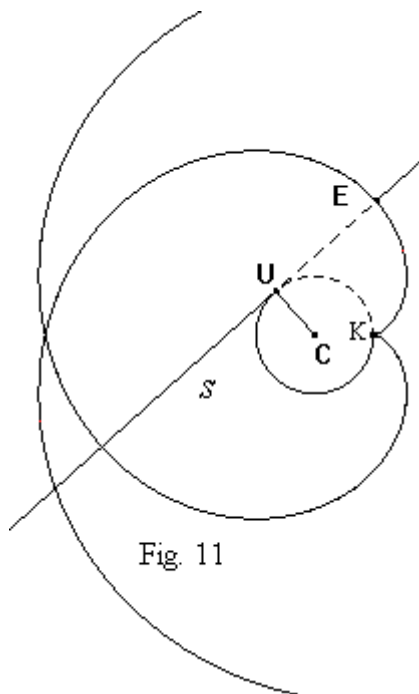


Fig. 11

E' evidente che Clairaut utilizza il movimento inverso di quello che genera la cicloide. Se infatti (cfr. Fig. 1), invece di far rotolare la circonferenza sulla retta s , facciamo rotolare (senza strisciare) la retta s sulla circonferenza, il piano σ resta immobile e il piano π ruota insieme alla retta (lo supponiamo ad essa rigidamente vincolato). Anche questa situazione, in cui ogni punto E della retta s descrive una evolvente della circonferenza (cfr. Fig. 11), può essere facilmente simulata in Cabri⁽⁸⁾. Se ora ad E si vincola un segmento ES (di lunghezza costante) perpendicolare alla retta mobile s (cfr. un esempio in Fig. 12) si possono ottenere numerose curve (si tratta di *spirali* che Clairaut studia nella citata memoria del

1740): la loro forma dipende dalla lunghezza del segmento ES e dal semipiano (di origine s) in cui giace. Quando ES appartiene al semipiano in cui si trova il centro C della circonferenza fissa e ha *lunghezza uguale al raggio di questa*, il confronto tra le Fig. 9 e 13 porta subito a concludere che la curva descritta da S è una spirale di Archimede.

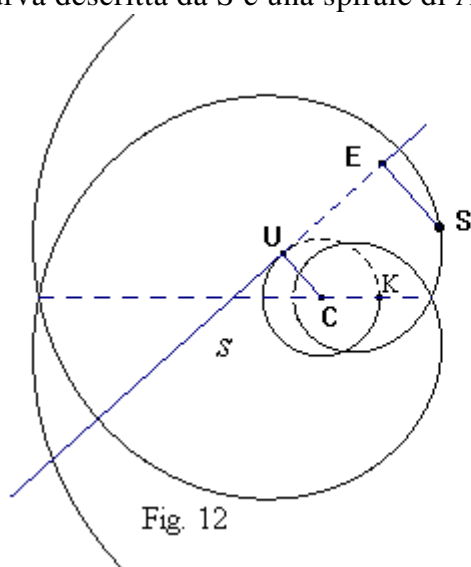


Fig. 12

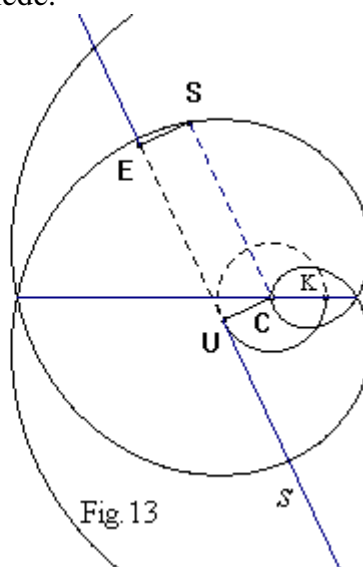
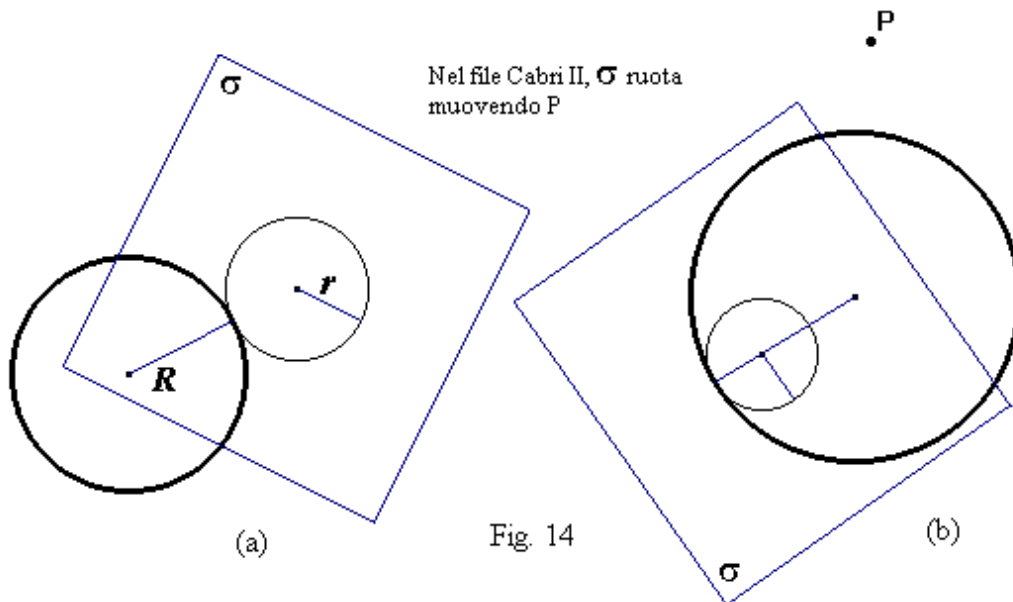


Fig. 13

3. Podarie di circonferenza



In Fig. 14 è rappresentato un *disco* ⁽¹⁾ di raggio r che rotola senza strisciare (mantenendosi in contatto con un piano fisso π) su una base circolare di raggio R appartenente a π . I punti di σ , piano individuato da una delle facce del disco e da questo trascinato nel suo movimento, descrivono curve su π : *epicicloid*i se disco e base si mantengono tangenti esternamente (come in Fig. 14 a), *ipocicloid*i se sono invece tangenti internamente (Fig. 14 b). Si tratta di curve chiuse e algebriche quando il rapporto r/R è razionale ⁽⁹⁾.

Esaminiamo qui le epicicloid*i* generate dal tracciante T, vincolato a un punto di σ , nel caso in cui $R = r$. Si distinguono tre casi: e-*p*icicloid*i* *accorciate*, *ordinarie*, *allungate*, che corrispondono rispettivamente (indicando con d la distanza fra T e il centro della ruota) alle tre possibilità $d < r$, $d = r$, $d > r$. Sono curve (cfr. le Fig. 15, 16, 17, nelle

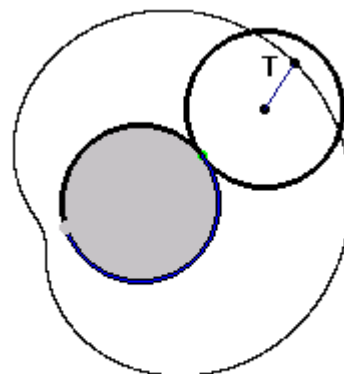


Fig. 15

Volendo l'equazione cartesiana, elimineremo il parametro. Elevando al quadrato le espressioni di x ed y fornite da (2) e poi sommandole membro a membro si ottiene:

$$x^2 + y^2 = 4R^2 + d^2 + 4Rd \cos \varphi;$$

da questa equazione, sostituendovi il valore di $\cos \varphi$ dedotto dalla prima delle (2) (usare le formule di duplicazione degli archi) si ricava:

$$(x^2 + y^2 - 2R^2 - d^2)^2 = 4R^2(R^2 + 2d^2 + 2dx)$$

Sostituendo $(x-d)$ a x si porta nell'origine il punto N, giungendo all'equazione canonica:

$$(x^2 + y^2 - 2dx)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (3).$$

E' immediato verificare che la (3) resta valida per qualsiasi valore di $ET = d$, e rappresenta quindi anche le curve di Fig. 15 e 16.

Questo tipo di generazione delle lumache di Pascal ci permette di riconoscere facilmente che sono podarie di circonferenza. Infatti, in ogni istante, ruota e base sono circonferenze simmetriche rispetto alla tangente τ nel loro punto di contatto: segue che ogni punto T vincolato alla ruota e trascinato da questa nel suo movimento è in ogni istante simmetrico (rispetto a τ) di un punto K vincolato alla base (immobile).

L'ispezione dell'esempio di Fig. 18 mostra subito che il luogo dei punti T (qualunque essi siano) si ottiene dalla podaria della circonferenza base rispetto al punto K (podaria descritta da M, intersezione tra KT e τ) mediante una omotetia di rapporto 2 avente come centro il medesimo punto K.

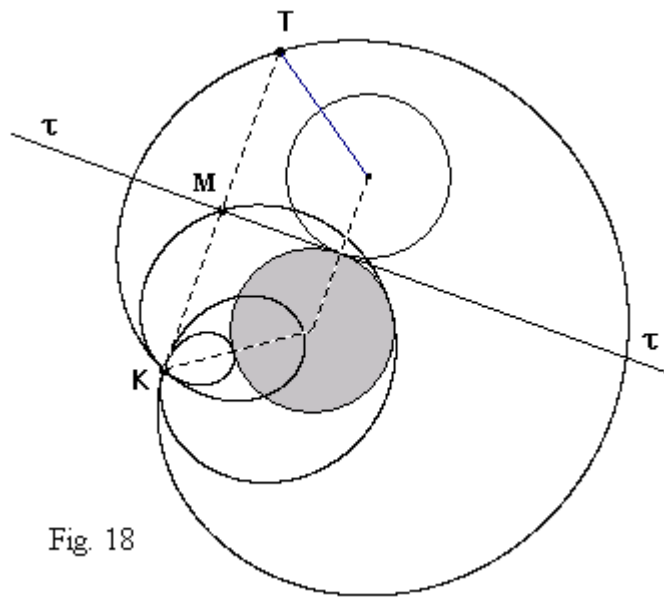


Fig. 18

4. Ellisse come ipocicloide

L'ellisse (unica fra le sezioni coniche) appartiene alla famiglia delle ipocicloidi. Si consideri un meccanismo come quello di Fig. 14 b, in cui però il cerchio interno rotolante (*ruota*) abbia raggio metà di quello fisso (*base*) e passi dunque costantemente per il centro C di quest'ultimo.

In tale ipotesi (Fig. 19) un punto qualunque M appartenente alla circonferenza rotolante (nei modelli fisici la punta di un tracciatore infilato nel bordo della ruota) genera un diametro del cerchio fisso.

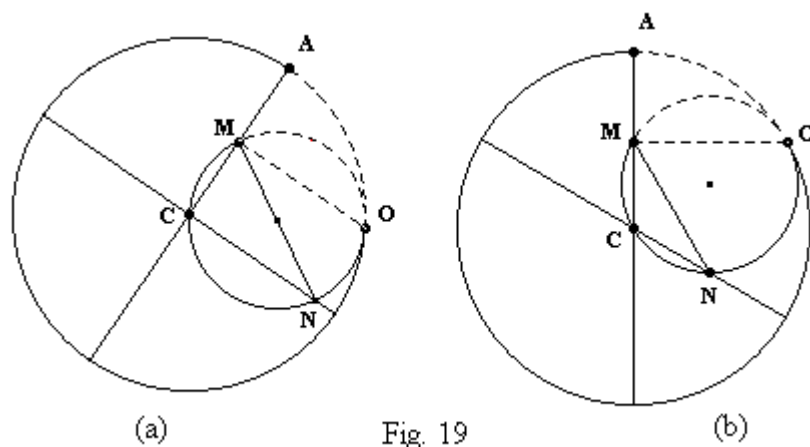


Fig. 19

Per dimostrare quanto detto⁽¹⁰⁾, è sufficiente osservare che, *qualunque sia la posizione di M*, il punto A in cui la retta MC incontra il cerchio fisso rimane immobile nel tempo perché gli archi OM ed OA sono uguali ed A è il punto in cui si trova M quando viene in contatto con la base. Oppure, utilizzando concetti di geometria cinematica: O è il *centro istantaneo di rotazione*, perciò OM è normale alla traiettoria di M e quindi MC (per-

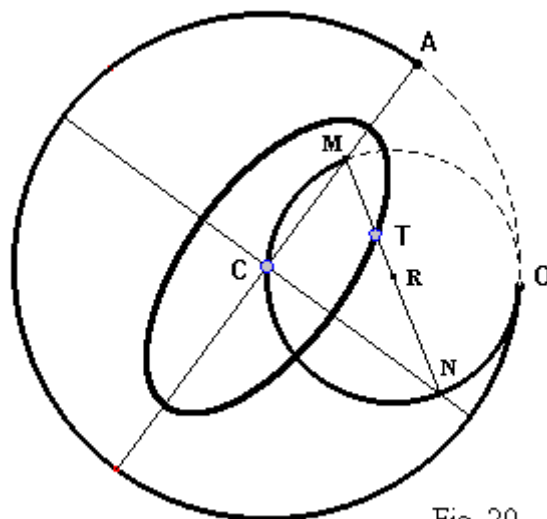


Fig. 20

pendicolare ad OM perché OC è diametro della ruota) fornisce la direzione della tangente alla traiettoria di M. Essendo C un punto fisso, il luogo dei punti M sarà la retta CA. Due punti M ed N diametralmente opposti descriveranno ovviamente due diametri perpendicolari (Fig. 19a); se M ed N sono estremi di una corda, i diametri saranno obliqui (Fig. 19b).

Si prenda ora (Fig. 20) un punto (tracciato) T appartenente a un piano mobile vincolato alla ruota, lo si congiunga con il centro R di questa, e siano M ed N i punti in cui la retta RT interseca la circonferenza della ruota. Per ciò che si è detto, mentre la ruota ruzzola sulla base circolare fissa, il segmento MN (diametro della ruota) si muove (insieme alla retta RT) mantenendo i suoi estremi su due rette perpendicolari. E' immediato verificare che il luogo tracciato da T è una ellisse: posto infatti $MT = a$, $TN = b$, angolo $MNC = \alpha$, si ha (nel riferimento indicato in figura): $x = a \cos \alpha$, $y = b \sin \alpha$. Ritroviamo qui, in un contesto diverso, uno strumento per disegnare ellissi già noto agli antichi (ellissografo di Proclo)⁽¹¹⁾ ed equivalente ad altri costruiti nel Seicento (per es. compasso di Van Schooten)⁽¹²⁾. Si può tracciare, a partire dal punto T, una corda MN anziché un diametro, giungendo alle medesime conclusioni (cfr. l'esempio di Fig. 21). Dunque:

se un segmento di lunghezza costante si muove mantenendo i suoi estremi su due rette incidenti (perpendicolari o no) ogni punto ad esso rigidamente vincolato descrive una ellisse.

Nelle Fig. 16, 17, 18 abbiamo considerato meccanismi in cui il tracciato T è trasportato da un piano (σ) solidale con la ruota. Ma (come abbiamo già fatto nel paragrafo 2) anche in questo caso possiamo immaginare che il tracciato sia infilato in un foro praticato nel piano fisso (quello che sostiene la base) in modo che la sua punta tocchi il piano mobile σ , e chiederci quale sarà la curva che tale punta genera su σ .

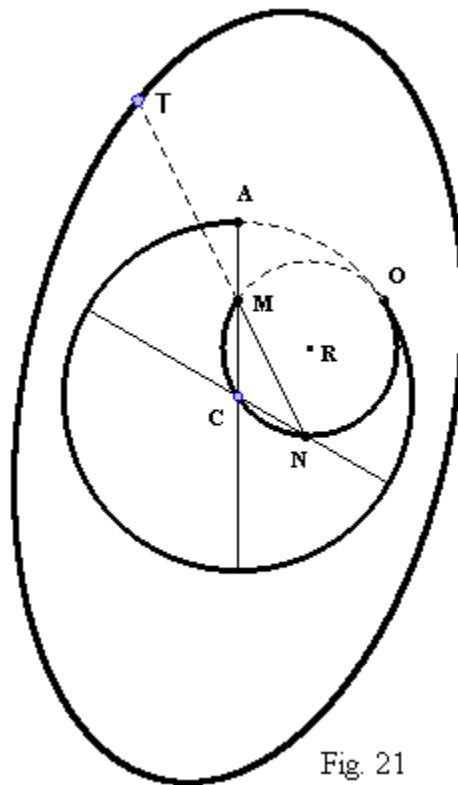


Fig. 21

Per i disegni e le simulazioni in Cabri è però più comodo (e del tutto equivalente) considerare il movimento inverso di quello che ha prodotto l'ellisse come ipocicloide: far ruotare cioè un cerchio su un altro cerchio fisso ad esso interno e avente raggio metà.

Collochiamo allora il tracciatore T in un punto qualsiasi di un piano vincolato rigidamente alla circonferenza mobile di raggio $2r$ e centro C (nella

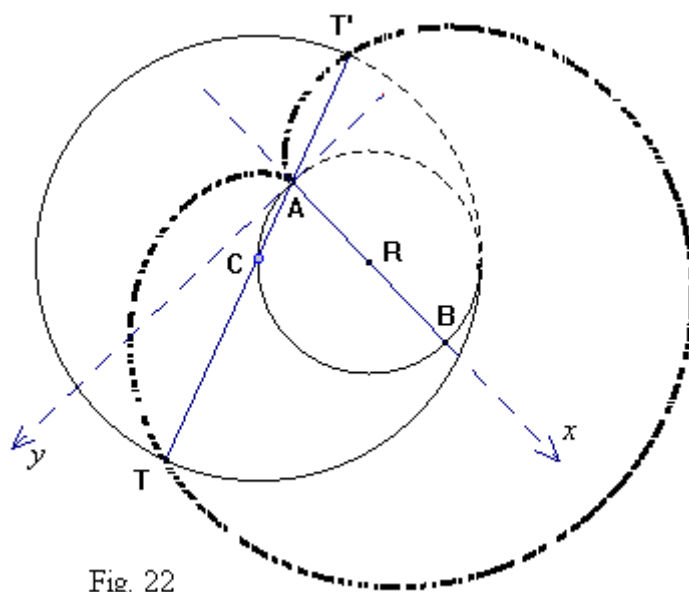


Fig. 22

Fig. 22 lo abbiamo scelto proprio su questa circonferenza), e consideriamo la retta congiungente T con C. Invertendo i ragionamenti eseguiti sulla Fig. 19 si può dimostrare che TC (come ogni altra retta passante per il centro della circonferenza mobile) taglia la base (circonferenza fissa di centro R e raggio r) in un punto A.

Durante il moto di C (che si sposta sulla base) la lunghezza del segmento TC rimane costante e A resta immobile.

Determiniamo l'equazione del luogo descritto da T. Poniamo $TC = d$. Preso il punto fisso A come polo e come asse polare il diametro $AB = 2r$ della base, si ha:

$AT = \rho = 2r \cos \vartheta + d$ ($\vartheta = \text{angolo} RAT = \text{angolo} BAC$). Passando a coordinate cartesiane (il riferimento è indicato in figura; in esso $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \vartheta$):

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - d^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Il confronto con la (3) del paragrafo precedente mostra che si tratta della medesima equazione (ovviamente i parametri hanno un diverso significato). Si ottengono quindi ancora, in corrispondenza ai diversi valori che può assumere d , le lumache di S. Pascal. Ma questa nuova generazione ci permette

di riconoscere che tali curve (oltre che come *podarie di circonferenza*) si possono anche definire come *concoide a base circolare*.

Si ricordi infatti la seguente definizione:

Dati in un piano un punto A (*polo*) e una curva $\mathcal{C}$ (*base*), si tracci da O una trasversale t che intersechi la base in C ; sulla trasversale, a partire da C , si riporti (nei due versi possibili) una lunghezza costante d (*intervallo*); si ottengono così, sulla trasversale, due punti il cui luogo geometrico dicesi *concoide della curva $\mathcal{C}$* .

Leggendo la definizione sulla Fig. 22, si vede subito che ognuna delle lumache di S. Pascal è concoide di una circonferenza *passante per il polo*, e che i punti T e T' simmetrici rispetto a C appartengono alla medesima curva. L'aspetto delle lumache (presenza di nodo, di cuspide o di inflessioni) dipenderà dal valore dell'intervallo d (in Fig. 22 è rappresentata una *cardioide*: $d = r$).

Non è per caso che le lumache del Pascal si possono generare con meccanismi sia di tipo epicicloidale che di tipo ipocicloidale. Euler infatti ha dimostrato ⁽¹³⁾ che una curva ottenibile in uno dei due modi può in generale essere ottenuta anche con l'altro.

5. Ellissi e sinusoidi

Consideriamo ora un *ruzzo cilindrico* che rotoli senza strisciare su un piano fisso π ; i punti di tangenza tra la superficie del rullo e π formano il

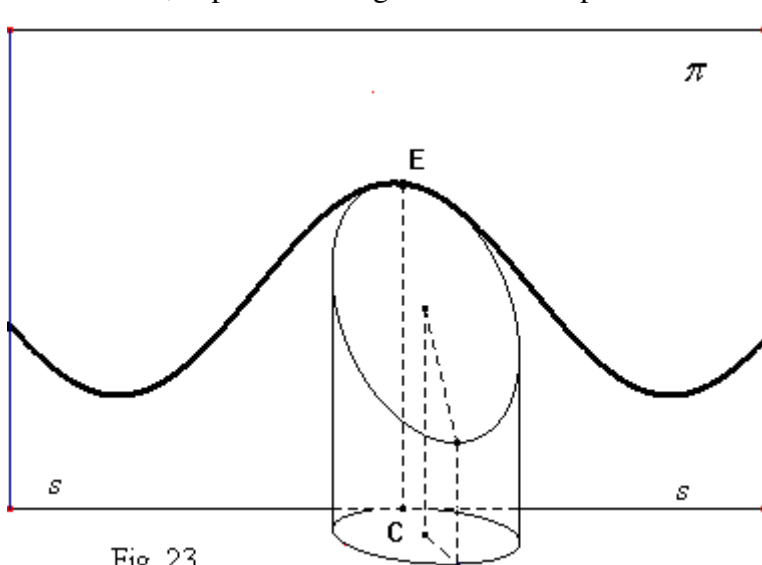


Fig. 23

segmento EC (Fig. 23) ⁽¹⁴⁾. Il rullo abbia come base inferiore un cerchio di raggio r (mobile in un piano σ perpendicolare a π); superiormente, sia invece limitato da una ellisse ⁽¹⁵⁾.

C ed E indicano, rispettivamente, i punti di contatto del piano

π (verticale), con la circonferenza e l'ellisse. Mentre il rullo si muove, C descrive la retta s (intersezione tra π e σ); il luogo dei punti E è una sinusoidale (giacente su π). Per dimostrare quest'ultima affermazione supponiamo che nell'istante in cui il rullo incomincia a mettersi in moto (per es. verso destra), il piano dell'ellisse sia perpendicolare a π .

Questo caso è illustrato in Fig. 24, dove:

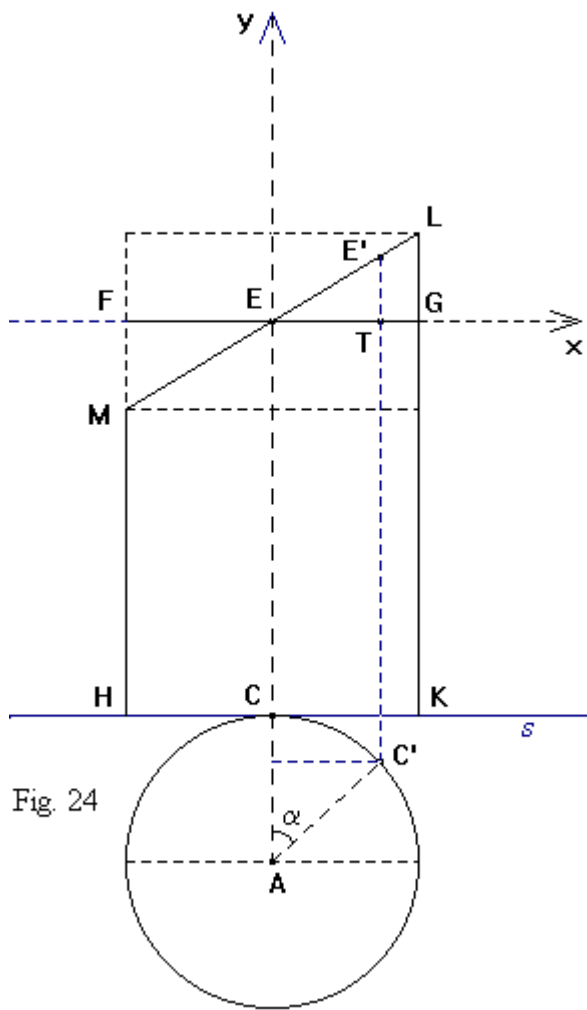


Fig. 24

- la proiezione ortogonale del rullo sul piano π è il trapezio HKLM;

- il segmento LM è proiezione ortogonale su π della ellisse (il cui asse maggiore ha lunghezza uguale a LM);

- il segmento FG è proiezione ortogonale su π del cerchio parallelo alla base del rullo e avente il centro sovrapposto a quello dell'ellisse (quindi LM ed FG si intersecano nel loro punto medio).

In Fig. 24 si vede anche:

- il cerchio di base del rullo, ribaltato sul piano π al di sotto della retta s (confrontare con la Fig. 23);

- un riferimento cartesiano ortonormale avente come origine E (punto di contatto tra π e l'ellisse ed estremo dell'asse minore di questa): l'asse delle ascisse (parallelo ad s) contiene il segmento FG, quello delle ordinate il segmento EC.

Supponiamo che il riferimento così individuato rimanga immobile mentre il rullo si sposta. Scegliamo ora un punto C' sulla circonferenza di base del rullo (gli corrisponde sul

segmento FG, in Fig. 24, il punto T)⁽¹⁶⁾. Dopo un certo intervallo di tempo Δt il punto di contatto tra questa circonferenza e la retta s diventerà C' : contemporaneamente, quello tra l'ellisse e π si sposterà in E^* (punto rappresentato in Fig. 24 dall'intersezione E' tra ML e la parallela $C'T$ all'asse delle ordinate)⁽¹⁷⁾. L'ascissa di E^* sarà data allora dalla lunghezza dell'arco CC' (che misura lo spostamento subito dall'asse del rullo cilindrico nell'intervallo Δt); l'ordinata di E^* sarà invece la lunghezza di $TE' = C'E^*$ (segmento appartenente alla superficie laterale del rullo e costante durante il moto).

Indicando con α l'angolo $\hat{C}AC'$ (cfr. sempre Fig. 24) si ha subito:

$ET = r \sin \alpha$, arco $CC' = r\alpha$, $C'E^* = TE' = kET$ (k è la pendenza della retta LM).

Segue: $\begin{cases} x = r\alpha \\ y = kr \sin \alpha \end{cases}$ da cui $y = k \sin \frac{x}{r}$, equazione che rappresenta una curva affine alla senoide ($y = \sin x$).

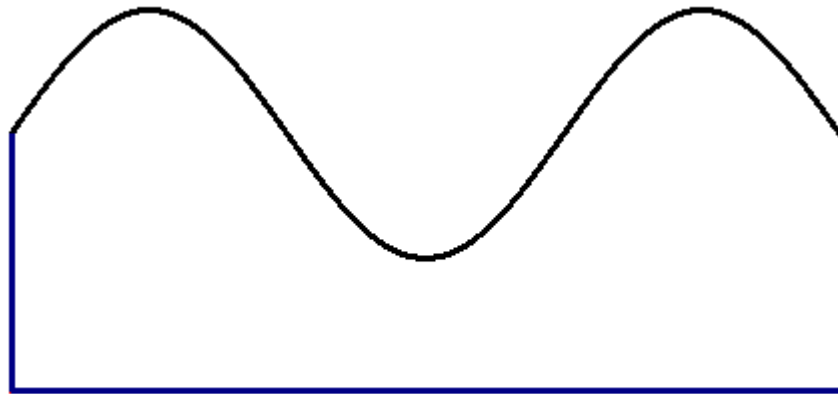


Fig. 25

E' divertente la seguente esperienza: dopo aver costruito un rullo come quello di Fig. 23 (cilindro tronco) gli si avvolga intorno un foglio di carta (sottile), facendo due o tre giri completi; poi con una lama si tagli la carta lungo il piano della faccia ellittica da un lato, lungo il piano della faccia circolare dall'altro. Svolgendo il foglio su un tavolo, si può controllare che uno dei suoi bordi (un esempio in Fig. 25) ha (con ottima approssimazione) un andamento sinusoidale.

6. Coni rotolanti

Poiché anche un cono può rotolare sul piano senza strisciare e sulla sua superficie laterale (sviluppabile nel piano) può essere tracciata un'ellisse, è a questo punto naturale proporre anche per ruote coniche il problema affrontato nel paragrafo precedente.

Consideriamo dunque un cono circolare retto (limitato; raggio di base R , apotema h), che rotoli senza strisciare sul piano fisso π descrivendo un cer-

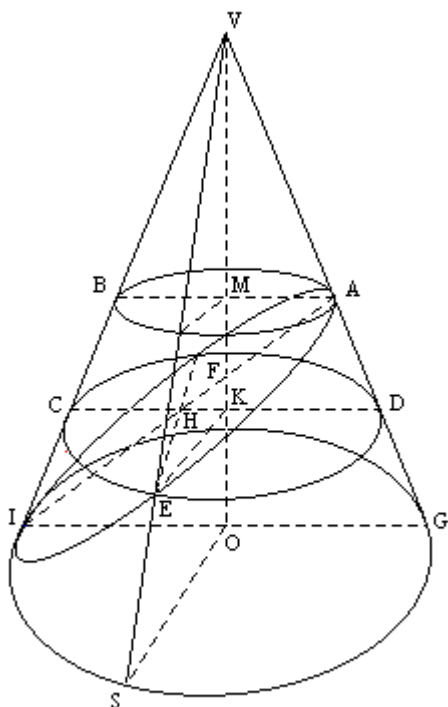


Fig. 26

chio di raggio h , e mantenendo il suo vertice V al centro di tale cerchio. Indichiamo con E il punto di contatto tra π e una ellisse disegnata sul cono. Determiniamo l'equazione del luogo geometrico descritto dai punti di contatto E durante il rotolamento del cono ⁽¹⁸⁾.

Con riferimento alla Fig. 26 ⁽¹⁹⁾: V è il vertice del cono; l'ellisse è ottenuta con un piano secante perpendicolare al triangolo per l'asse VIG e passante per il vertice I di tale triangolo; $a = AI$ è quindi l'asse dell'ellisse sezione.

Sia inoltre: F l'intersezione tra AI e l'altezza VO del cono; $2\alpha = \widehat{A\hat{V}B}$ l'ampiezza dell'angolo al vertice del triangolo per l'asse (perciò α è pari all'angolo $\widehat{A\hat{V}F}$); β l'angolo $\widehat{A\hat{I}G}$ (uguale a $\widehat{F\hat{I}O}$).

Indichiamo poi con $\omega = \widehat{SOG}$ l'ampiezza dell'angolo al centro cor-

rispondente all'arco SG appartenente alla circonferenza di raggio R passante per I (base del cono); con $\vartheta = S \hat{V} G$ l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente ad un arco di lunghezza uguale a SG ma appartenente alla circonferenza di raggio $h = VG$ che delimita su π lo sviluppo della superficie laterale del cono (Fig. 27).

Poniamo infine $AF = p$, $OG = R$, $MA = r$ (M è il centro della circonferenza passante per A e parallela alla base del cono).

Risulta: (4) $VA = VB = \frac{r}{\sin \alpha}$; (5) $VI = VG = \frac{R}{\sin \alpha} = h$; $\sin \alpha = \frac{R}{h}$.

Essendo (Fig. 27): arco $SG = R\omega = h\vartheta$ (gli angoli ω e ϑ sono misurati in radianti) si ha: $R\omega = h\vartheta$, $\omega = \frac{\vartheta}{\sin \alpha} = k\vartheta$ ($k = \frac{1}{\sin \alpha}$).

Scelto un punto E sull'ellisse, considerato il piano ECD parallelo alla base del cono e passante per E (cfr. ancora Fig. 26), piano che interseca AI in H e VO in K , si ricava: $CH : AB = CI : BI$. Pertanto

$$CH = \frac{AB \times CI}{BI} = \frac{2r(VI - VC)}{(VI - VB)} = \frac{2r(R - VE \sin \alpha)}{(R - r)} \quad (6) \quad (\text{sono state usate le}$$

(4) e (5)).

Gli archi SG hanno in (a) e in (b) la medesima lunghezza.
In (b) si vede lo sviluppo in piano della superficie laterale del cono.

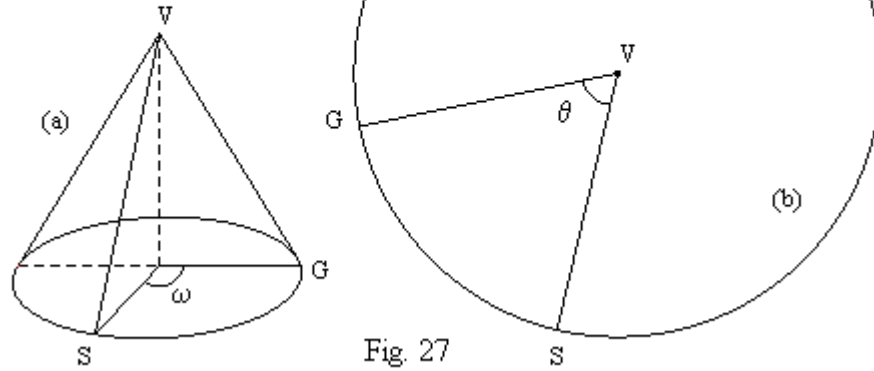


Fig. 27

Si osservi ora: $CH = CK + KE \cos \omega = VE \sin \alpha (1 + \cos \omega)$ (infatti $CK = KE$ perché raggi della medesima circonferenza, e $KE = VE \sin \alpha$).

Sostituendo questa espressione di CH nella (6) dopo aver posto $VE = \rho$, ricordando inoltre che $r = p \sin \beta$, $R = FI \sin \beta = (AI - AF) \sin \beta = (a - p) \sin \beta$, si deduce infine, con qualche semplice passaggio:

$$(7) \rho = \frac{2kp(a-p)\text{sen}\beta}{a+(a-2p)\text{cos}k\vartheta}, \text{ dove } k = \frac{1}{\text{sen}\alpha}.$$

Nel caso particolare in cui $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$(8) \rho = \frac{2p(a-p)}{a+(a-2p)\text{cos}k\vartheta} \text{cot}\alpha.$$

La (7) (oppure la (8)) sono equazioni polari della curva richiesta, luogo dei punti di contatto E tra l'ellisse e il piano π . Si tratta di una curva (la cui

forma dipende dal valore numerico del rapporto $\frac{h}{R}$)

contenuta entro la circonferenza di centro V (vertice del cono) e raggio h (apotema del

cono); il raggio vettore $\rho = VE$ appartiene al segmento lungo il quale si toccano π e il cono rotolante; come asse polare si può prendere una retta qualsiasi di π passante per V.

Nelle Figure 28 e 29 (eseguite in Cabri: è possibile animarle per osservare la ruota conica durante il suo movimento)⁽²⁰⁾ appare la forma assunta dalla curva se $\frac{h}{R} = 6$ (Fig. 28), op-

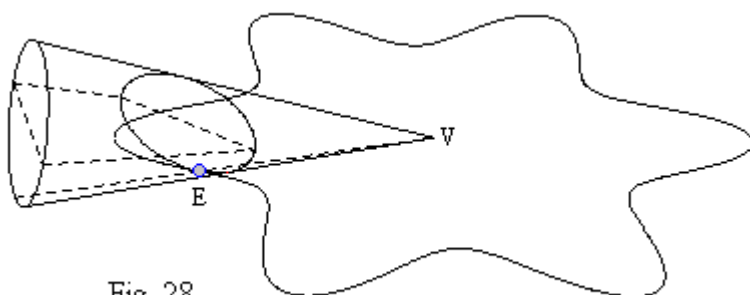


Fig. 28

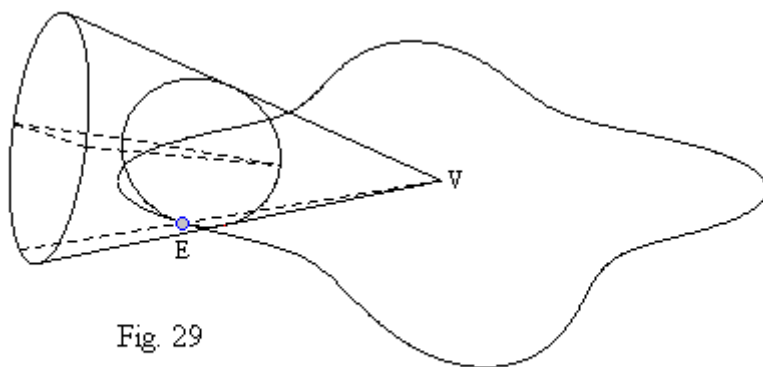


Fig. 29

• P

Si anima muovendo il punto P

pure quando il rapporto $\frac{h}{R} = 4$ (Fig. 29). Si noti che le figure sono eseguite in prospettiva: il piano π , su cui avviene il rotolamento, è orizzontale (parallelo al piano di terra).

I modelli descritti sono conservati presso il Laboratorio delle Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Telefono: 059 2055039

e-mail: macchine@unimore.it Sito web: www.mmlab.unimore.it

Note

⁽¹⁾ Sia dato un cilindro circolare retto con altezza h e raggio di base r : se h è molto minore di r (cfr. Fig. I qui allegata) avremo un *disco* (circolare); se invece r è minore di h avremo un *rullo* (cilindrico). Dischi e rulli schematizzano due diversi tipi di *ruote*.

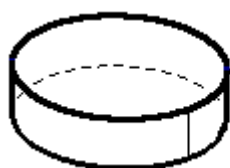


Fig. I

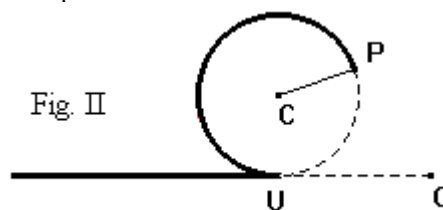


Fig. II

⁽²⁾ Per la simulazione in Cabri si può procedere come segue (cfr. Fig. II): data una semiretta t di origine O e una circonferenza ad essa tangente in U e avente il centro C scorrevole su una parallela a t , si riporti sulla circonferenza la lunghezza del segmento OU , ottenendo l'arco UP . Spostando C in modo che U si allontani da O , il raggio CP della circonferenza si metterà in rotazione, insieme con ogni punto ad esso rigidamente vincolato.

⁽³⁾ Cfr. S. Tessieri, *La lunga storia della cicloide*, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Centro Ricerche Didattiche U. Morin, vol. 22 B n° 1 (febbraio 1999 pag. 013) e n° 2 (aprile 1999 pag. 107). Cfr. anche G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Milano 1930.

⁽⁴⁾ Citiamo i seguenti risultati:

- nella cicloide ordinaria l'arco compreso fra due cuspidi consecutive è uguale al quadruplo del diametro del cerchio generatore (cfr. G. Wallis, *Opera mathematica*, Oxoniae 1693, vol. I)

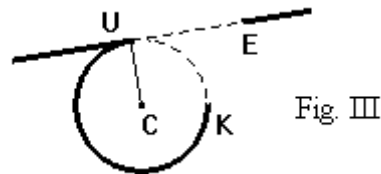
- l'area di una cicloide ordinaria compresa tra la base e l'arco limitato da due cuspidi consecutive è uguale al triplo dell'area del cerchio generatore (cfr. G. P. de Roberval, *Mémoires de l'Académie royale des sciences* 6, Paris; pubblicato nel 1742)
- La normale in un punto qualsiasi di una cicloide si ottiene congiungendo tale punto col punto di contatto tra la base e la corrispondente posizione del cerchio generatore. (cfr. R. Descartes, *Lettera a Mersenne del 23 agosto 1638*, in *Oeuvres*, ed. Adam Tannery, Paris 1898, vol. 2).

⁽⁵⁾ Cfr. Chr. Huygens, *De orologio oscillatorio*, La Haye 1658; M. D'Ocagne, *Cours de Géométrie*, Tome I cap. VI (*Cinématique appliquée*).

⁽⁶⁾ Cfr. Archimede, *Spirali*, in *Opere*, ed. Fraiese, Torino 1974: pag. 345, definizione I.

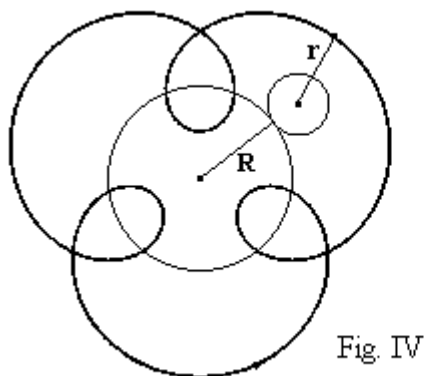
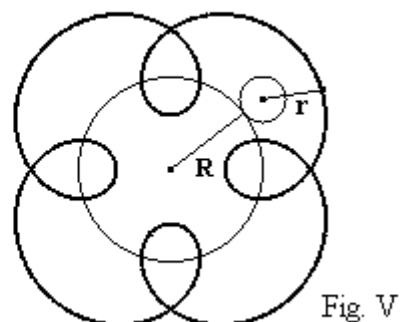
⁽⁷⁾ A. Clairaut, *De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde et des quelques autres courbes du même genre*, in *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, anno 1740 (pubblicato nel 1742).

⁽⁸⁾ Dato un punto U variabile su una circonferenza di centro C e raggio CU, si consideri una retta tangente in U alla circonferenza. fissato su questa un punto K, si riporti sulla retta tangente, a partire da U, una lunghezza UE uguale a quella dell'arco KU. (Cfr. Fig. III).



Spostando il punto U, la retta rotola senza strisciare mantenendosi tangente alla circonferenza.

⁽⁹⁾ Abbiamo qui disegnato due epicloidi (allungate) corrispondenti rispettivamente ai seguenti valori del rapporto r/R : $1/3$ (Fig. IV), $1/4$ (Fig. V).



⁽¹⁰⁾ Cfr. per es. G. Koenigs, *Leçons de Cinématique*, Paris, Hermann 1897, cap. VII.

⁽¹¹⁾ Cfr. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein, Leipzig 1873, pag. 106.

⁽¹²⁾ Per informazioni sul compasso di Van Schooten cfr. Pergola – Zanolì – Martínez – Turrini, *Modelli fisici per la matematica: sulle sezioni del cilindro retto*, Progetto Alice n° 4, vol. II 2001-I pag. 147-148.

⁽¹³⁾ L. Euler, *Acta Academiae scientiarum imperialis*, Petropoli 1781, pag. 48-59.

⁽¹⁴⁾ Prendiamo in considerazione soltanto cilindri circolari retti: cfr. nota (1). Rulli cilindrici sono molto usati nelle macchine: si pensi ai plotter, ai compressori stradali, ai nastri trasportatori ecc.

⁽¹⁵⁾ Su π rotola quindi un cilindro (circolare retto) troncato con un piano obliquo rispetto all'asse. Sulle sezioni piane del cilindro retto cfr. l'articolo citato in nota (12).

⁽¹⁶⁾ Si ricordi che in Fig. 24 ogni punto di FG si ottiene come proiezione ortogonale su π di una corda della circonferenza passante per il centro dell'ellisse e parallela alla base del cilindro: ad esempio AC (segmento perpendicolare a π visibile nella parte inferiore di Fig. 24) si proietta in E. La corda parallela ad AC e passante per C' si proietta in T.

⁽¹⁷⁾ Anche i punti di LM (cfr. nella Fig. 24 la parte al di sopra della retta s) sono proiezioni ortogonali su π di corde dell'ellisse sezione (parallele all'asse minore).

⁽¹⁸⁾ Anche in questo caso consideriamo per semplicità soltanto coni circolari retti. La ruota che si muove sul piano potrebbe avere anche la forma di un tronco di cono retto, delimitato ad una delle sue estremità da un cerchio, all'altra da una ellisse: come quello esemplificato in Fig. VI.

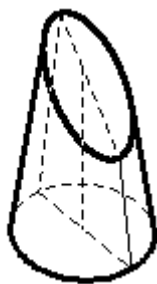


Fig. VI

⁽¹⁹⁾ Il cono (lo si immagini realizzato in materiale trasparente) è rappresentato in prospettiva.

⁽²⁰⁾ L'elaborazione in Cabri II di queste figure è piuttosto complessa. Dobbiamo la loro esecuzione all'abilità e alla pazienza della nostra collaboratrice Annalisa Martínez, che ringraziamo.