

Geometria sulle dita

Maria G. Bartolini Bussi

Facoltà di Scienze della Formazione

Università di Modena e Reggio Emilia

Introduzione

In questo contributo si descrive la collaborazione avviata nel 2004-05 tra *l'Istituto Regionale per Ciechi "G. Garibaldi"* di Reggio Emilia e il *Laboratorio delle Macchine Matematiche* dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia. La collaborazione si è svolta all'interno di un progetto cofinanziato dall'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna, dal MIUR (Contributo per la Diffusione della Cultura Scientifica di cui al Decreto Direttoriale n. 774/Ric/2005) e dal Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia. Nell'ambito del progetto, sono state svolte le seguenti attività:

- Progettazione di macchine matematiche, adattate per l'utilizzo efficace da parte di soggetti con minorazioni visive, in collaborazione con il servizio di Consulenza Tiflopedagogica "A. Romagnoli" dell'Istituto;
- Realizzazione da parte dell'*Associazione Macchine Matematiche* di Modena di nove prototipi di macchine matematiche adattate;
- Allestimento (5 novembre – 23 dicembre 2005), della mostra *Geometria a tu per tu – Geometry on the fingers* presso la biblioteca dell'Istituto.

Ha seguito lo svolgimento delle attività Simona Vangelisti, titolare di una borsa di studio (16 settembre 2005 – 15 luglio 2006) presso il

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, sotto la direzione dell'autrice di questo contributo. Il testo qui pubblicato attinge in molte parti al rendiconto finale della borsa di studio. (<http://www.matematicainsieme.it/Mostra%20geometria/index.htm>). Una breve sintesi dell'attività è stata presentata in occasione del convegno nazionale *Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi* svolto nel 2007 a Castel S. Pietro Terme (Vangelisti, 2007).

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena (<http://www.mmlab.unimore.it>) è un centro di ricerca sulla didattica della matematica con l'uso di strumenti. Il laboratorio è collocato presso il Dipartimento di Matematica pura ed Applicata dell'Università (via G. Campi 213/b, 41125, Modena) mentre l'officina di costruzione e una mostra permanente sono collocate in un altro stabile (via Tito Livio 1, 41123, Modena) e affidate dall'Università all'Associazione Macchine Matematiche (<http://associazioni.monet.modena.it/macmatem/>). Nelle due sedi sono collocati oltre duecento modelli di macchine matematiche, la maggior parte delle quali costruite dall'Associazione, divise in due grandi categorie, quella delle macchine geometriche e quella delle macchine aritmetiche:

- Una *macchina geometrica* è uno strumento che costringe un punto (o una figura) a muoversi o a essere trasformato secondo una legge matematica data;
- Una *macchina aritmetica* è uno strumento che consente di eseguire una delle seguenti azioni: contare, ordinare, eseguire operazioni aritmetiche.

Le macchine del laboratorio sono *strumenti ad alta manipolabilità* (realizzati in legno, metallo, plastica ecc., mossi direttamente dalle mani dell'utente, senza motori, circuiti stampati e simili). Esse quindi richiedono un intervento diretto del corpo, molto più significativo a quello richiesto dagli strumenti "virtuali" simulati per mezzo dei computer. Un esempio a tutti familiare di macchina geometrica è il compasso per tracciare cerchi; esempi di macchine aritmetiche sono il pallottoliere e l'abaco, oltre ai modelli di calcolatrici meccaniche non elettriche.

Il laboratorio di Modena utilizza le macchine matematiche in ricerche orientate in diverse direzioni:

- Insegnamento-apprendimento della matematica in classe (*educazione formale*), attraverso il prestito agli insegnanti di macchine e la consulenza per la realizzazione di percorsi di didattica laboratoriale;
- Laboratori svolti in sede per classi in visita (*educazione non formale*) su percorsi prestabiliti e prenotati dagli insegnanti;
- Mostre pubbliche realizzate presso istituzioni culturali, spazi espositivi, centri commerciali (apprendimento informale).

Numerosi esempi di attività riguardanti l'educazione formale sono descritti nel testo di Maria G. Bartolini Bussi e Michela Maschietto (2006); informazioni sulle attività di educazione non formale sono disponibili nel portale del laboratorio (www.mmlab.unimore.it) così come riferimenti alle numerose mostre allestite in Italia e all'estero. Un esempio per tutti, di questo ultimo tipo, è la mostra "Perspectiva artificialis" allestita su invito nel marzo 2009 a Roma presso l'Auditorium Parco della Musica (<http://www.auditorium.com/eventi/4939867>), che, in tre giorni, ha visto la presenza di circa 55.000 visitatori.

Proprio in occasione di una mostra pubblica è avvenuto l'incontro con Loredana Piccolo, responsabile del servizio di Consulenza Tiflopedagogica "A. Romagnoli" dell'Istituto Regionale per Ciechi di Reggio Emilia.

L'avvio della collaborazione

Nell'autunno del 2004, a Sant'Arcangelo di Romagna, è stato realizzato l'allestimento della mostra *Geometria a tu per tu*, realizzata come mostra itinerante nelle province della regione Emilia-Romagna, sulla base di una convenzione stipulata dal Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia con l'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia-Romagna. Loredana Piccolo ha avuto l'occasione di visitare la mostra ed è stata colpita dalle caratteristiche di alta manipolabilità delle macchine. Come ha avuto occasione di dire in un incontro successivo, le è parso evidente un possibile utilizzo nella didattica per i soggetti con minorazioni visive. Non avevamo mai pensato a questa possibilità. Certo conoscevamo l'esistenza di sussidi speciali per bambini e ragazzi con minorazioni visive, ma i due mondi (quello della ricerca

didattica per studenti normodotati e quello della ricerca didattica per studenti con disabilità) sembravano lontani e impermeabili l'uno all'altro.

Una visita da parte del gruppo di ricerca ai locali dell'Istituto "G. Garibaldi" ci ha fatto conoscere la grande varietà di sussidi prodotti per gli studenti con minorazioni visive (alcuni veramente ingegnosi) e degli strumenti utilizzati per produrre in modo non manuale testi in Braille e figure accessibili all'esplorazione aptica.

E' emersa quasi subito una caratteristica interessante: mentre alcuni dei sussidi speciali in uso sono concretizzazioni *a posteriori* di concetti matematici costruiti nella storia, le macchine geometriche sono ricostruzioni di strumenti che sono parte della *fenomenologia storica della geometria*; in altre parole, nella storia, queste macchine hanno contribuito alla costruzione di significati matematici. Un esempio potrà meglio illustrare questa osservazione, che sarà comunque ripresa anche nel seguito.

Un sussidio molto comune per i bambini con minorazioni visive è costituito da un filo teso tra due chiodi o due fori di una tavoletta con una perla forata che scorre sul filo. L'intenzione è quella di concretizzare l'appartenenza di un punto (perla) ad un segmento (filo teso), mostrando, nello stesso tempo, che il punto può assumere diverse posizioni sul segmento. Questa concretizzazione contiene in sé alcuni rischi e può favorire l'insorgere di ambiguità e perfino di concettualizzazioni erranee riguardanti:

- la "forma" di un punto: un punto ha forma sferica?
- l'appartenenza dei punti: come può un punto essere l'intersezione di due segmenti?
- il "numero" di punti che stanno su un segmento: sono in numero finito o infinito?

e così via.

Si consideri invece il compasso, che traccia un cerchio, cioè che costringe un punto a muoversi su una traiettoria circolare. La traccia della traiettoria può essere resa accessibile ai non vedenti se la punta scrivente è dotata di una rotellina dentata che lascia una traccia sul piano di feltro o di gomma, in modo simile a quanto avviene per la traccia lasciata dalla grafite su un foglio di carta. In questo caso la macchina produce la *traiettoria* (che solo in un secondo tempo può assumere forma sensibile). I singoli punti sono *posizioni sulla traiettoria*. Se disponessimo di un compasso in grado

di tracciare un segmento, potremmo realizzare la stessa esperienza per traiettorie rettilinee.

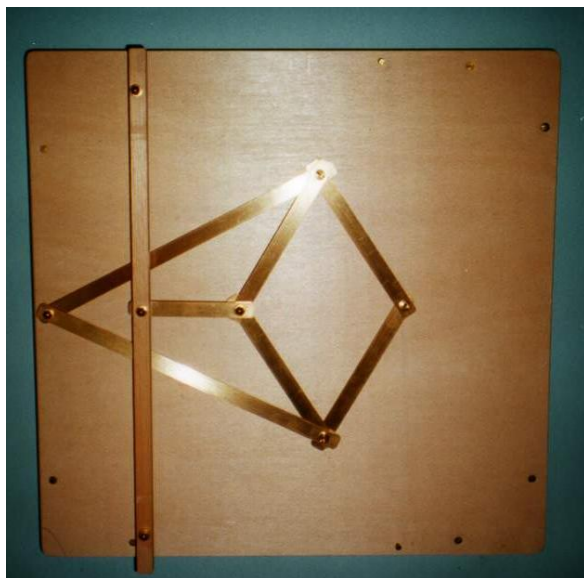


Fig. 1 – Guida rettilinea di Peaucellier

Esiste un simile compasso? Il compasso tradizionale è documentato nella storia fino dall'era precristiana, attraverso ritrovamenti archeologici di strumenti; l'allusione al compasso è del resto documentata nelle opere di Euclide e di Erone. Nell'antichità erano noti anche altri tipi di compasso, per tracciare curve (ad esempio la *concoide di Nicomede*, <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/079ogg.htm>). Ci si può chiedere se esisteva o se esiste un compasso che traccia segmenti. Questa domanda invita ad entrare in modo più approfondito nella fenomenologia storica della geometria. Per secoli si è creduto che un simile compasso non potesse esistere. Per le applicazioni tecnologiche (ad esempio la trasformazione di un moto circolare, ottenibile con una semplice ruota, in un moto rettilineo) si è fatto ricorso a strumenti *approssimati* che consentissero di tracciare archi quasi rettilinei. Si pensava tuttavia che una soluzione rigorosa non esistesse. Solo alla metà del XIX secolo (1864), l'ingegnere francese Charles-Nicolas Peaucellier è riuscito a costruire un sistema articolato in grado di tracciare *rigorosamente* un segmento (Fig. 1) con il punto mobile alla destra dell'immagine. Altre soluzioni rigorose sono

state prodotte negli stessi anni, per cui oggi possediamo molti compassi in grado di tracciare rigorosamente segmenti. Accanto a questo tipo di compasso (detto anche *guida rettilinea*), esistono macchine per tracciare coniche e curve di grado superiore, oltre a curve trascendenti.

Nel 2005 ci siamo accordati con Loredana Piccolo per realizzare alcune macchine per tracciare curve (*curvigrafi*) che rendessero anche esplorabile con le mani la traiettoria, non disegnata, ma incisa nella base di sostegno. Oltre ai tracciatori di curve, si è deciso di produrre anche macchine speciali a due gradi di libertà (*pantografi*) che mettono in corrispondenza due regioni del piano: sono, cioè, macchine che rappresentano trasformazioni geometriche.

Ci è stato richiesto anche di realizzare alcuni dei grandi modelli che rappresentano la genesi tridimensionale di trasformazioni geometriche (proiezioni centrali e proiezioni parallele). Queste macchine avrebbero potuto rendere più facili per gli studenti con minorazioni visive le regole per l'esecuzione delle tavole nel disegno tecnico. Si sono adottate soluzioni tecniche particolari, concordate insieme, per facilitare l'esplorazione da parte di studenti con minorazioni visive. Così i fili tesi per rappresentare i raggi di proiezione sono stati scelti più resistenti e di spessore maggiore; i piani di plexiglas sono stati sostituiti con piani *quadrettati* (realizzati con parti dei carrelli per la spesa) o *rigati* realizzati con serie di aste parallele tutte alla stessa distanza; le figure disegnate sono state sostituite con modellini di legno ad alto spessore.

La mostra del 2005

Nell'autunno 2005 è stata realizzata, presso l'Istituto Regionale per Ciechi "G. Garibaldi" di Reggio Emilia una mostra delle macchine costruite, con il titolo *Geometria a tu per tu – Geometry on the fingers*. Le macchine esposte sono le seguenti:

Trasformazioni:

- Traslazione;
- Simmetria assiale;
- Simmetria centrale;
- Pantografo di Scheiner per omotetie;
- Genesi tridimensionale della traslazione;

- Genesi tridimensionale dell'omotetia.

Curvigraphi:

- Parabolografo del Cavalieri;
- Iperbolografo ad antiparallelogramma;
- Ellissografo ad antiparallelogramma.

Ciascun modello è dotato di una scheda descrittiva in Braille, un disegno in caratteri ingranditi per ipovedenti e un disegno in rilievo, realizzato con il sistema Minolta. A ciascun modello è stato affiancato il modello per visitatori normodotati, perché la visita alla mostra potesse anche illustrare gli accorgimenti tecnici usati nell'adattamento delle macchine.

Una sezione particolare per la scuola elementare è stata allestita con tassellazioni poligonali magnetiche, appoggiate su un piano metallico.

Per tutta la durata della mostra, essa è stata visitabile durante gli orari di apertura della Biblioteca. La mostra è rimasta allestita da Novembre 2005 a Gennaio 2006. Durante il periodo di apertura è stata visitata da parecchie centinaia di studenti di scuola elementare, scuola media e scuola secondaria superiore e da gruppi di insegnanti. Hanno visitato la mostra anche ospiti della Facoltà di Scienze della Formazione, tra cui un gruppo di ricercatori guidati da Howard Gardner.

Tra gli studenti delle classi in visita ci sono stati molti casi di studenti non vedenti o ipovedenti. Hanno visitato la mostra alcuni adulti non vedenti tra cui una collaboratrice dell'Istituto, che si è prestata anche alle riprese video girate dalla troupe del Centro televisivo di Ateneo (<http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home/Video.html>), e un'insegnante di materie letterarie che si occupa da anni di attività di recupero e sostegno in ogni settore, in particolare quello matematico.

I visitatori con minorazioni visive hanno molto apprezzato le macchine speciali. Gli adulti confrontavano questa esperienza con la loro esperienza scolastica, ricordando le ore trascorse sui libri in Braille o ad ascoltare compagni leggere quelli "in nero" prima di capire determinate proprietà, che con strumenti di questo tipo avrebbero compreso molto prima.

Ha visitato la mostra anche un gruppo di sordo-ciechi. Le spiegazioni sono state tradotte dagli accompagnatori con il metodo digitale Molossi. La visita è stata lentissima e impegnativa. Con gli studenti con minorazioni visive, ed in particolare con i sordo-ciechi, è impossibile far esplorare lo stesso strumento a due persone, perché si ostacolano a vicenda con le mani.

La guida all'esplorazione deve essere quindi individualizzata e, possibilmente, con un accompagnatore per ciascun visitatore.

Descrizione di alcune macchine adattate

Nella comunicazione di Simona Vangelisti (2007) al convegno su *Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi*, sono state descritte accuratamente le due macchine speciali che realizzano la *traslazione* e il tracciamento di un'ellisse (*ellissografo*) con un antiparallelogramma articolato.

In questo testo si riporta la descrizione di due macchine sulla genesi tridimensionale di trasformazioni, che sono state illustrate nel Convegno di Reggio Emilia su *La complessità invisibile: le sinergie dell'esplorazione* (giugno 2009). Sono qui presentate sia la macchina matematica originale sia quella adattata per i soggetti con minorazioni visive. Queste ultime sono attualmente esposte nei locali dell'Istituto.

La prima macchina rappresenta la genesi spaziale dell'omotetia.



Fig. 2 – Genesi spaziale dell'omotetia (macchina originale)

La macchina, nella posizione iniziale (aperta) allude al modello matematico della prospettiva centrale da un piano ad un piano parallelo

ovvero dell'ombra generata da una sorgente puntiforme da un piano ad un piano parallelo.

Nel modello originale (Fig. 2) i due piani paralleli sono realizzati con lastre di plexiglas trasparente. Da un punto esterno (centro di proiezione) escono fili tesi che congiungono i vertici di un quadrilatero disegnato su uno dei due piani con i vertici di un secondo quadrilatero (omotetico al primo) sull'altro. Un meccanismo a manovella permette di avvicinare i due piani, mantenuti sempre paralleli, e contemporaneamente il punto origine dei fili tesi, fino al contatto che allude alla sovrapposizione completa. Nella posizione finale (chiusa) i due quadrilateri e il centro di proiezione appaiono complanari e l'omotetia è una trasformazione del piano in sé.



Fig. 3 – Genesi spaziale dell'omotetia (macchina adattata)

Nel modello adattato (Fig. 3) i piani di plexiglas sono sostituiti con reticolati di metallo che permettono l'esplorazione con le dita da sopra, da sotto ed anche attraverso il piano. I quadrilateri sono realizzati con forme di

legno spesse. I fili sono più grossi e robusti per consentire anche urti involontari. Dopo una esplorazione completa della macchina aperta, il soggetto non vedente può con una mano agire sulla manovella e con l'altra seguire il movimento di uno dei due piani. L'operazione può essere ripetuta più volte per seguire il movimento di ciascun piano e del centro di proiezione. Il controllo manuale consente di rallentare il movimento per ripetere parte dell'esplorazione spostando la mano che esplora in diverse parti della macchina.

La seconda macchina rappresenta la genesi spaziale della traslazione. Il modello illustra una proiezione per raggi paralleli da un piano ad un piano parallelo e può essere usata per illustrare il fenomeno delle ombre solari. I due piani sono realizzati, nella macchina originale, con lastre di plexiglas su cui sono disegnate due coppie di poligoni i cui vertici sono collegati da fili paralleli. Un meccanismo a manovella permette di avvicinare (fino ad alludere alla sovrapposizione completa) i due piani mantenuti sempre paralleli con i fili tesi paralleli. Nella posizione finale (chiusa) tutti i poligoni e i fili appaiono complanari (Fig. 4).



Fig. 4. Genesi spaziale della traslazione (macchina originale)

Nel modello adattato (Fig. 5) i piani di plexiglas sono sostituiti con listelli di ottone che alludono ad un piano rigato. Come nel caso precedente ciò consente l'esplorazione con le dita. Vi è solo una coppia di quadrilateri realizzati con forme di legno spesse.



Fig. 4. Genesi spaziale della traslazione (macchina adattata)

L'esplorazione delle due macchine è stata sperimentata con soggetti non vedenti sia durante la mostra del 2005 che nel corso del convegno su *La complessità invisibile: le sinergie dell'esplorazione* (giugno 2009): essa è stata molto apprezzata perché si svolge, se pur guidata, sotto il controllo del soggetto, in piena autonomia.

Il valore di una collaborazione

Nella preparazione della mostra, con il supporto di Loredana Piccolo, abbiamo approfondito alcune tematiche relative alla didattica della geometria con studenti non vedenti o ipovedenti. Spesso le strategie utilizzate nella didattica per non vedenti si limitano a cercare di ovviare

alla mancanza della vista, rendendo tangibile ciò che normalmente si guarda, ma senza sfruttare le peculiarità dell'esplorazione aptica.

J. E. F. Del Campo (2000), nel suo testo su *L'insegnamento della matematica ai ciechi*, propone molte strategie specifiche. Ad esempio, nell'introdurre le isometrie sostituisce il disegno tracciato con una matita con il disegno punteggiato sul foglio di gomma, ma l'isometria è comunque presentata come una trasformazione legata al movimento: un foglio scivola su un altro e, di conseguenza, il disegno si sposta. La trasformazione è confusa con il movimento. Solo in un secondo tempo Del Campo propone esercizi in cui riconoscere se due figure sono traslate, ruotate, simmetriche, ecc. Questo approccio è del tutto simile a quello tradizionalmente destinato agli studenti normodotati. La critica che segue, quindi, non è da intendere come rivolta alla didattica della geometria per studenti con minorazioni visive ma, piuttosto, alla didattica della geometria in generale, a cui la didattica speciale si è ispirata.

L'approccio ad una trasformazione geometrica per mezzo di una macchina matematica è epistemologicamente diverso, in quanto la trasformazione è svincolata dallo scivolamento dei fogli. Nei pantografi, si punta l'attenzione sulla corrispondenza tra un punto direttore e un punto tracciatore, che consente alla macchina di mettere in relazione due regioni di piano. In ogni istante, durante la deformazione del pantografo, c'è una corrispondenza tra il punto direttore e il punto tracciatore, dimostrabile per via geometrica, che dipende dai vincoli del sistema.

Dunque l'uso delle macchine matematiche introduce una dimensione diversa ed epistemologicamente corretta nello studio delle curve (curvigrafi) e delle trasformazioni geometriche (pantografi). Le macchine tridimensionali sulle proiezioni consentono di esplorare fisicamente le definizioni complesse che stanno alla base del disegno tecnico.

La collaborazione tra il Laboratorio delle Macchine matematiche e l'Istituto Regionale per Ciechi "G. Garibaldi" ci ha consentito di venire in contatto con molte ricerche specifiche sulla percezione aptica che ci hanno consentito di interpretare in modo nuovo anche osservazioni svolte nel passato su allievi normodotati.

Nel soggetto non vedente il tatto è il senso più importante per l'esplorazione e la costruzione delle immagini mentali. Per la formazione di immagini, sono necessari due tipi di esplorazioni: una prima esplorazione rapida e sommaria dell'insieme per comporre uno schema complessivo

dell'oggetto e una seconda esplorazione fine, che analizza in maniera dettagliata una ristretta porzione della superficie e colloca il particolare percepito nel quadro dell'immagine d'insieme. È quindi necessario e indispensabile il coordinamento delle due mani. Per chiudere una scatola, ad esempio, il bambino deve sostenerla con una mano, con la stessa individuarne i bordi e con l'altra mettere il coperchio nel punto che gli sta indicando la prima mano (la mano che fissa e guida è la mano detta non dominante, mentre quella che esegue è detta dominante).

La palpazione deve essere attiva ed essere eseguita con le due mani, anche se la mano non dominante è sempre meno attiva. La mano non dominante sostiene l'oggetto da esplorare e facilita riferimenti fissi. La mano dominante è più attiva, svolge movimenti più ampi e provvede all'integrazione dei dati. [...] I movimenti di palpazione sono di due tipi: quelli lievi, che assicurano informazioni su alcuni dettagli o sulle parti più significative di un oggetto; e i movimenti ampi, globalizzatori o di sintesi (Lucerga Revuelta, 1999).

Queste caratteristiche sono evidenti nel corso dell'esplorazione di una macchina matematica, come emerge anche dal video citato più sopra e riguardante l'esplorazione aptica da parte di una collaboratrice dell'istituto.

Conclusioni

Quanto detto nel paragrafo precedente suggerisce di superare la distanza tra la ricerca in didattica della matematica nella situazione degli studenti normodotati e la ricerca sulla didattica speciale nella situazione di studenti non vedenti. E' necessario precisare che nella ricerca in didattica della matematica sono pochissimi gli studi empirici che prendono in considerazione soggetti non vedenti.

Si può citare, ad esempio, lo studio di Virga (2001), che indaga sulle strategie messe in atto da non vedenti nella costruzione di rappresentazioni mentali del mesospazio. Un gruppo di venticinque non vedenti, di cui venti avevano perso la vista in età precoce e cinque in età adulta, sono stati chiamati a descrivere un ambiente nuovo, descrivendo le strategie messe in atto per l'esplorazione e la rappresentazione mentale.

Una ricerca interessante in età scolare è condotta dal gruppo coordinato da Lulu Healy a San Paolo (Brasile): il gruppo opera nel recupero di

ragazzi non vedenti di età compresa tra i 14 e il 18 anni, in una scuola che ha una lunga tradizione di integrazione. Negli studi pubblicati fino ad ora si studiano i processi di costruzione di significati matematici di tali soggetti durante l'interazione 1-1 con un ricercatore. I materiali utilizzati sono molto semplici: forme rettangolari cave, che possono essere riempite di cubetti (Healy e Fernandes, 2008); bastoncini collegabili tra loro con plastilina (Healy e Fernandes, 2009). Nel primo caso si indaga il processo di costruzione dei significati di area e perimetro ed in particolare la funzione dei gesti eseguiti dal soggetto prima sotto la guida del ricercatore e successivamente in modo autonomo. Nel secondo caso si indagano i cambiamenti nelle concettualizzazioni del ricercatore durante l'osservazione di uno studente non vedente che cerca di costruire una piramide con bastoncini collegati con palline di plastilina. Abbiamo concordato con Lulu Healy una ricerca congiunta che utilizzi come materiale di stimolo le macchine matematiche. Contiamo di riuscire a portare a termine studi specifici nel prossimo futuro.

Osservare un soggetto non vedente che esplora una macchina matematica fornisce un esempio molto chiaro di alternanza tra esplorazione globale e analitica. L'esplorazione globale iniziale (che sembra corrispondere al colpo d'occhio con cui il soggetto normodotato guarda l'oggetto) è seguita da una esplorazione analitica (che spesso manca nel soggetto normodotato). La presenza in una classe di uno studente non vedente è un'occasione per arricchire l'attività di tutti. L'esplorazione di una macchina matematica offre un contesto di integrazione molto favorevole, quando un piccolo gruppo di studenti opera sulla stessa macchina, con l'uso prevalente dell'esplorazione con la vista da parte di molti e con l'uso delle mani da parte di tutti: l'attenzione alla descrizione linguistica precisa è necessaria per comunicare con lo studente non vedente evitando il ricorso alla deissi ("questo", "quello", ecc.) che lo escluderebbe; l'esplorazione analitica (necessaria allo studente non vedente per costruire l'immagine mentale della macchina) aiuta tutti a scoprire le caratteristiche della macchina che governano il suo funzionamento.

Si tratta, per il momento, di intuizioni di potenzialità che non abbiamo ancora messo alla prova in una situazione sperimentale. In un futuro esperimento didattico, sarebbe interessante verificare se l'integrazione di uno studente non vedente in un gruppo di compagni nella situazione del laboratorio delle macchine matematiche può portare a un vantaggio per

tutti, introducendo un punto di vista analitico accanto alla punto di vista globale (e spesso superficiale) che sembra caratterizzare l'esplorazione spontanea da parte degli studenti normodotati.

Ringraziamenti

Ringrazio Loredana Piccolo dell'Istituto Regionale per Ciechi "G. Garibaldi" di Reggio Emilia; Marcello Pergola, Carla Zanoli, Annalisa Martinez e Simona Vangelisti dell'Associazione Macchine Matematiche. Le ricerche del Laboratorio delle Macchine Matematiche sono inserite nel PRIN (Progetto di Rilevante Interesse Nazionale) 2007B2M4EK ("Strumenti e rappresentazioni nell'insegnamento-apprendimento della matematica: teoria e pratica") cofinanziato dal MIUR e dall'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia e nel "Progetto Scienze e Tecnologie" finanziato dalla Regione Emilia Romagna.

Bibliografia

- Bartolini Bussi M. G. e Maschietto M. (2006), *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Milano: Springer.
- Del Campo J.E.F. (2000), *L'insegnamento della matematica ai ciechi*, Monza: Biblioteca Italiana per i Ciechi.
- Healy H. e Fernandes S. H. A. A. (2008), "The role of gestures in the mathematical practices of blind learners", *Proc. 32nd PME*, Morelia, Michoacán Mexico: PME.
- Healy H. e Fernandes S. H. A. A. (2009), "Relationships between sensory activity, cultural artefacts and mathematical cognition", *Proc. 33rd PME*, Thessaloniki, Greece: PME.
- Lucerga Revuelta R. (1999), *Palmo a palmo*, Monza: Biblioteca Italiana per i Ciechi "Regina Margherita" ONLUS.
- Vangelisti S. (2007), "Geometria tra le mani: macchine matematiche per non vedenti", *Atti del Convegno "Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi"*, Bologna: Pitagora editrice.
- Virga G. (2001), "Considerazioni sperimentali sulla rappresentazione mentale dello spazio dei non vedenti", <http://math.unipa.it/~grim/virga-nonvedenti.pdf>.

