

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

In ricordo di Marcello Pergola
(1933-2021)

Modelli fisici per la matematica: trisettori

**Anita Lugli, Elena Arabini
Michela Maschietto, Simona Vangelisti**

Riassunto

Questo articolo presenta alcune macchine matematiche per la soluzione del classico problema della trisezione dell'angolo. Per esempio, tra gli strumenti scelti vi è quello riferito a Kempe, ma anche a Pascal e a Ceva. Lo studio di questi strumenti è stato svolto come primo passo per la costruzione di un percorso didattico laboratoriale per la scuola secondaria.

Abstract

This paper describes some mathematical machines for solving the well-known classical problem of angle trisection. For instance, we refer to Kempe's trisector, as well as to Pascal and Ceva's tools. The study of these machines was the first step of an educational project, aiming to propose laboratory sessions on this topic to secondary school students.

Anita Lugli

Macchine Matematiche E.T.S.

anitalugli89@gmail.com

Michela Maschietto

Laboratorio delle macchine matematiche, Università di Modena e Reggio Emilia

michela.maschietto@unimore.it

Elena Arabini

Macchine Matematiche E.T.S.

elena.arabini@gmail.com

Simona Vangelisti

Macchine Matematiche E.T.S.

vangelistisimona@gmail.com

Introduzione

I problemi classici della matematica greca sono problemi di costruzione (Kline, 1996; Courant e Robbins, 2000), in cui è richiesto di trovare una determinata costruzione geometrica utilizzando solo la riga e il compasso, coerentemente con i primi tre postulati degli *Elementi* di Euclide. Sin da Libro I degli *Elementi*, sono presentate numerose costruzioni geometriche, necessarie per assicurare l'esistenza degli oggetti geometrici. Tuttavia, vi sono problemi di costruzione che non sono risolubili con il solo ricorso a riga e compasso. Tra questi vi sono i tre problemi classici della geometria greca: la trisezione dell'angolo (determinazione della terza parte di un qualsiasi angolo dato), la duplicazione del cubo (determinazione del lato di un cubo il cui volume sia il doppio di quello di un cubo il cui lato è un segmento qualsiasi dato) e la quadratura del cerchio (costruzione di un quadrato avente stessa area di un cerchio dato). L'origine di questi problemi può essere ricercata nell'interesse all'estensione di problemi già risolti dai matematici greci. Kline (1996) sostiene che la possibilità di bisecare un angolo qualsiasi ha naturalmente portato a porre la domanda sulla trisezione di un angolo qualsiasi, così come la duplicazione dell'area di un quadrato dato attraverso la sua diagonale ha sollecitato la formulazione dell'analogo problema per il cubo; infine, il problema della quadratura del cerchio può rappresentare un esempio di quei problemi che riguardano la costruzione di una figura di forma data avente area uguale a quella di una figura assegnata.

Come ribadisce Gherzi (1951), per quanto riguarda il problema della trisezione dell'angolo, l'impossibilità teorica di una certa costruzione non ha però impedito la ricerca e la costruzione di strumenti che hanno fornito soluzioni approssimate al problema considerato:

[...] *il problema può risolversi graficamente ricorrendo alle coniche, o ad altre curve, che tutte si possono tracciare con istrumenti speciali in sostituzione del comune compasso da circoli* (Gherzi, 1951, p. 446).

Oltre alle risoluzioni grafiche, Gherzi si sofferma sulla descrizione di *“alcuni strumenti più semplici ideati per risolvere meccanicamente il problema della trisezione dell'angolo”* (Gherzi, 1951, p.476).

Anche in Enriques (1924/1927) è contenuto un capitolo (Conti, 1924/1927) sulla trisezione dell'angolo, con riferimenti a metodi meccanici e a strumenti.

In questo articolo si presentano alcune macchine matematiche (Bartolini e Maschietto, 2006; Pergola e Zanolì, 1994), chiamate *trisettori*, che permettono di trisecare un angolo qualsiasi, pur restando comunque nei limiti fisici degli

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

stessi. I trisettori presentati in questo articolo sono stati costruiti da “Macchine Matematiche E.T.S.” (www.macchinematematiche.org; Pergola e Zanoli, 2010) e sono conservati presso il “Laboratorio delle macchine matematiche” (www.mmlab.unimore.it) dell’Università di Modena e Reggio Emilia.

Lo studio dei trisettori qui presentati è stato il primo passo per la costruzione di un percorso laboratoriale sul tema per la scuola secondaria di secondo grado (Lugli, 2020). Questa scelta riposa su tre aspetti:

- il tema si presta bene per la realizzazione di un percorso laboratoriale con le macchine matematiche;
- il tema si può collegare all'algebra moderna e alla teoria dei gruppi, siccome è grazie ad esse che si dimostra la non risolubilità del problema della trisezione dell'angolo, ed in generale dei tre problemi classici della matematica greca;
- si possono fare numerosi collegamenti storici, mettendo in evidenza da un lato come sia fruttuosa la formulazione e ricerca di soluzione a problemi in termini di produzione di nuove conoscenze, dall’altro il legame tra matematica e meccanica.

Il percorso didattico, a cui ha collaborato “Macchine Matematiche E.T.S.”, è stato sperimentato presso una classe del Liceo Scientifico “A.Moro” di Reggio Emilia, docente la prof.ssa Simona Vangelisti.

1. Trisetttore di Pascal

Étienne Pascal (1588-1651), padre di Blaise Pascal, si dedicò allo studio della curva oggi nota con il nome di lumaca di Pascal (“limaçon”). Questa curva può essere utilizzata per risolvere il problema della trisezione dell’angolo (Gherzi, 1951). Il trisetttore di Pascal è così chiamato in quanto la sua struttura si può ricondurre a quella dello strumento per il tracciamento della lumaca di Pascal.

Questo trisetttore è anche noto con il nome di trisetttore di Tissandier (Gherzi, 1951).

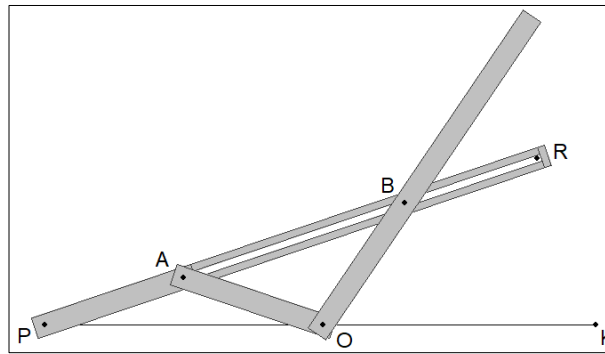


Figura 1: trisetettore di Pascal.

Il trisetettore di Pascal (Figura 1) è costituito da:

- un piano π di legno su cui è incisa una scanalatura PK;
- un'asta PR incernierata al piano π nel punto P;
- due aste OA e OB incernierate in O ad un cursore scorrevole lungo la scanalatura PK. L'estremo A dell'asta OA è una cerniera fissata su PR in modo tale che PA, OA e OB abbiano la stessa lunghezza, mentre il punto B dell'asta OB è un cursore che scivola lungo la scanalatura AR dell'asta PR.

Dato un angolo α disegnato su un foglio, il trisetettore di Pascal va posizionato in modo tale che i lati dell'angolo α coincidano con OK e OB (Figura 2). Questa macchina triseca l'angolo α e la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{OPA}$ (Figura 2).

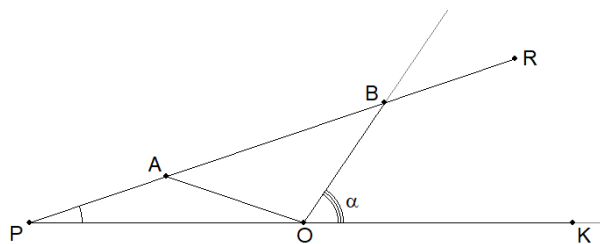


Figura 2: posizionamento del trisetettore di Pascal al fine di trisecare un angolo α .

La dimostrazione che l'angolo $\widehat{OPA}$ è pari a $\alpha/3$ fa riferimento alla Figura 3. Questa dimostrazione si basa principalmente sul Teorema dell'angolo esterno.

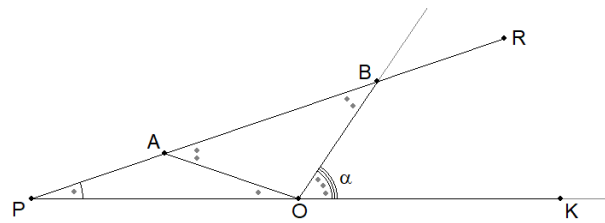


Figura 3

Per ipotesi si ha $PA \cong OA \cong OB$.

Il triangolo isoscele PAO ha:

- gli angoli alla base PO congruenti, $\widehat{OPA} \cong \widehat{POA}$;
- l'angolo esterno $\widehat{BAO}$, adiacente all'angolo interno $\widehat{PAO}$, congruente alla somma dei due angoli interni $\widehat{OPA}$ e $\widehat{POA}$ per il Teorema dell'angolo esterno, $\widehat{BAO} \cong \widehat{OPA} + \widehat{POA}$.

Allora si ha $\widehat{BAO} \cong 2\widehat{OPA}$. (1)

Il triangolo isoscele AOB ha gli angoli di base congruenti, $\widehat{BAO} \cong \widehat{ABO}$. In particolare per la relazione (1) si ha

$\widehat{BAO} \cong \widehat{ABO} \cong 2\widehat{OPA}$. (2)

Il triangolo POB ha l'angolo esterno α , adiacente all'angolo interno $\widehat{POB}$, congruente alla somma dei due angoli interni $\widehat{OPA}$ e $\widehat{ABO}$ per il Teorema dell'angolo esterno, $\alpha \cong \widehat{OPA} + \widehat{ABO}$. In particolare per la relazione (2) si ha $\alpha \cong 3\widehat{OPA}$.

Si ricava allora $\widehat{OPA} \cong \alpha/3$. ■

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

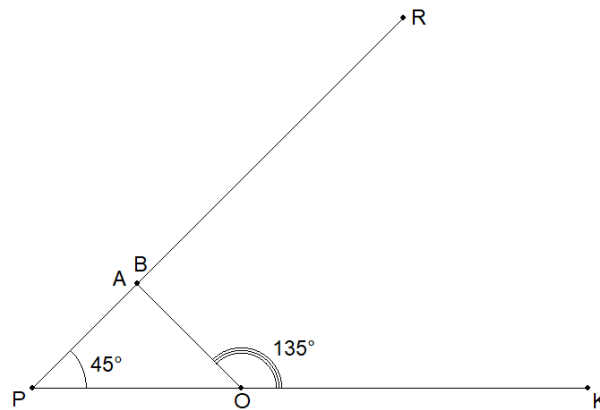


Figura 4: angolo massimo che il trisetttore di Pascal riesce a trisecare.

Il trisetttore di Pascal presenta dei limiti strutturali. Teoricamente, considerando le aste come segmenti e i perni come punti del piano, con esso si riescono a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$. Infatti il trisetttore di Pascal raggiunge il massimo angolo da trisecare quando i punti A e B coincidono (Figura 4). In tal caso si ha che l'asta OA (che si sovrappone a OB) è perpendicolare all'asta PR. Di conseguenza il triangolo isoscele OAP è rettangolo in $\widehat{OAP}$ e i suoi angoli di base, $\widehat{OPA}$ e $\widehat{POA}$, misurano 45° . Allora, seguendo la dimostrazione di cui sopra, si ha $\alpha \cong \widehat{OAP} + \widehat{OPA}$ la cui ampiezza è pari a $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. L'altra posizione limite di questo trisetttore, corrispondente a un angolo nullo, si ha quando i punti A e B giacciono sulla scanalatura PK.

In particolare, il trisetttore di Pascal presente nel “Laboratorio delle macchine matematiche” riesce a trisecare solo angoli α la cui ampiezza è compresa tra 33° e 132° .

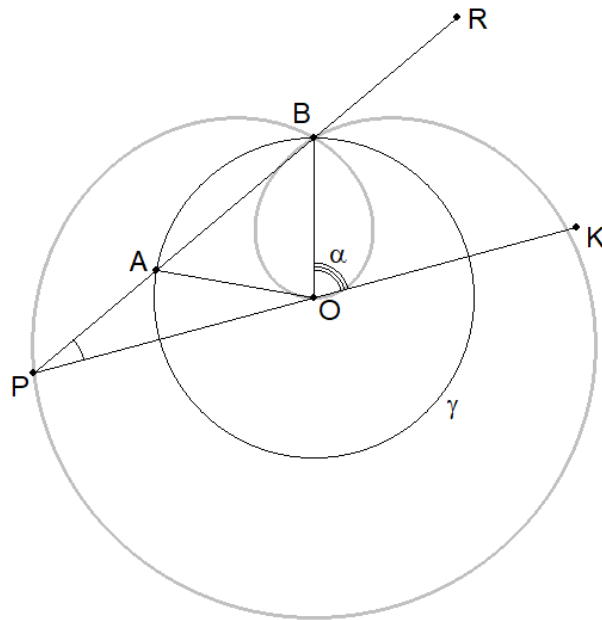


Figura 5

Come mostrato in Figura 5, la struttura di questo trisetttore si può ricondurre a quella per il tracciamento della lumaca di Pascal. Infatti se si considera un piano π solidale con l'asta OB, il punto A descrive su di esso la circonferenza γ di centro O e raggio OB, l'asta PR passa sempre per B e il punto P (sull'asta) che ha distanza costante da A. Il punto P descrive allora su π una lumaca di Pascal che ha come circonferenza base γ , polo B e intervallo uguale ad OB corrispondente al raggio della circonferenza base.

2. Trisetttore di Ceva

Il trisetttore di Ceva (1696, citato in Gheresi, 1951) è costituito da (Figura 6):

- un piano π di legno;
- un rombo articolato OABC incernierato al piano π nel vertice O;
- due aste BD e BE aventi lunghezza uguale al lato del rombo, i cui vertici D ed E sono vincolati a scorrere nelle aste scanalate prolungamento, rispettivamente, dei lati OA e OC.

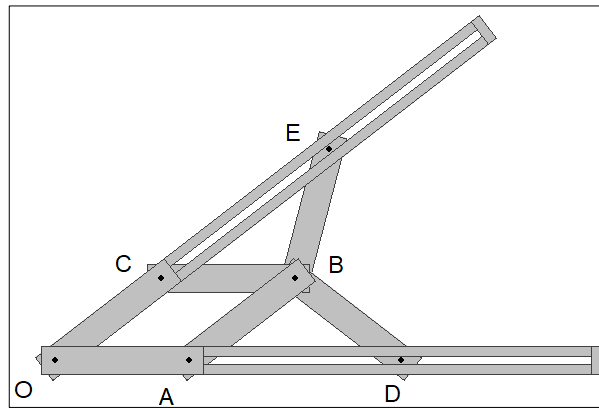


Figura 6: trisetttore di Ceva.

Un angolo α disegnato su un foglio deve essere posizionato sul piano del trisetttore di Ceva (si possono aprire/chiudere entrambe le aste scanalate) in modo tale che (Figura 7):

Passo 1: il vertice dell'angolo α coincida con il vertice B del rombo OABC;

Passo 2: un lato dell'angolo α passi per l'estremo D dell'asta BD;

Passo 3: l'altro lato dell'angolo α passi per l'estremo E dell'asta BE.

Questa macchina triseca l'angolo α : la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{AOC}$.

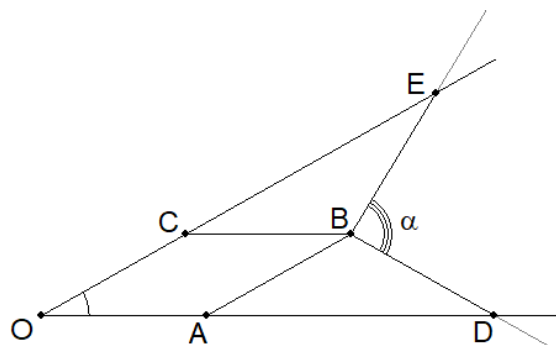


Figura 7: posizionamento del trisetttore di Ceva al fine di trisecare l'angolo α .

La dimostrazione che l'angolo $\widehat{AOC}$ è pari a $\alpha/3$ fa riferimento alla Figura 8 qui di seguito.

Per ipotesi si ha che:

- OABC è un rombo;

- i segmenti BD e BE sono congruenti al lato del rombo OABC.

Si traccia il prolungamento del lato CB dalla parte di B fino a un punto K.

I triangoli CBE e ABD, isosceli per costruzione, hanno tutti gli angoli alla base congruenti all'angolo $\widehat{AOC}$:

$$\widehat{BCE} \cong \widehat{BEC} \cong \widehat{BAD} \cong \widehat{BDA} \cong \widehat{AOC}. \quad (3)$$

Si considera:

- l'angolo esterno $\widehat{KBE}$ del triangolo BCE, adiacente all'angolo interno $\widehat{CBE}$, è congruente alla somma dei due angoli interni $\widehat{BCE}$ e $\widehat{BEC}$ per il Teorema dell'angolo esterno, $\widehat{KBE} \cong \widehat{BCE} + \widehat{BEC}$; inoltre considerando la relazione (3) si ha che $\widehat{KBE} \cong 2\widehat{AOC}$;

- l'angolo $\widehat{KBD}$ è congruente all'angolo $\widehat{BDA}$; inoltre considerando la relazione (3) si ha che $\widehat{KBD} \cong \widehat{AOC}$.

Sapendo che $\alpha \cong \widehat{KBE} + \widehat{KBD}$, si conclude che $\alpha \cong 2\widehat{AOC} + \widehat{AOC} \cong 3\widehat{AOC}$ e quindi $\widehat{AOC} \cong \alpha/3$. ■

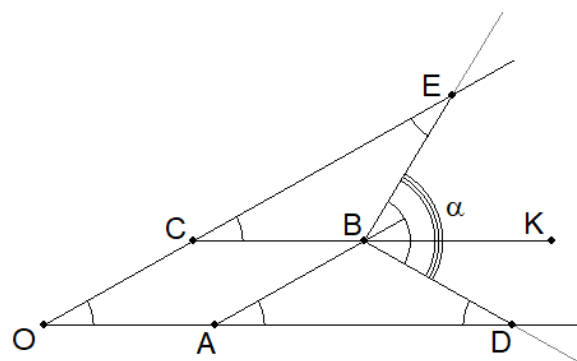


Figura 8

Teoricamente, il trisetttore di Ceva riesce a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$. Infatti esso raggiunge il massimo angolo da trisecare quando i punti A e D coincidono (Figura 9). In questo caso il rombo OABC è un quadrato. Allora α risulta l'angolo esplementare dell'angolo interno del quadrato, con misura dell'ampiezza pari a $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$. L'altra posizione limite del trisetttore, corrispondente a un angolo nullo, si ha quando il punto E coincide con D e C con A.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

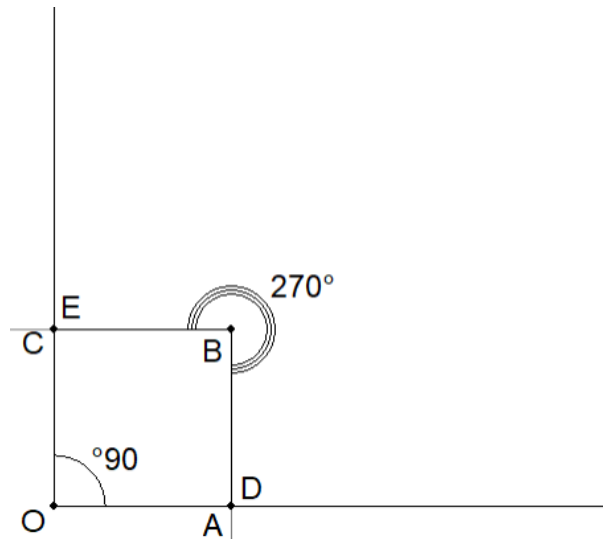


Figura 9: angolo massimo che il trisetttore di Ceva riesce a trisecare.

Il trisetttore di Ceva presenta dei limiti strutturali dovuti alle dimensioni reali delle sue componenti e a come sono state assemblate; in particolare il modello presente nel Laboratorio delle macchine matematiche riesce a trisecare solo angoli α la cui ampiezza è compresa tra 36° e 254° .

Durante il movimento di questa macchina trisettrice, i perni A e C si muovono lungo archi della circonferenza di centro O e raggio OA (avente stessa lunghezza di OC), mentre i perni B, D ed E hanno due gradi di libertà. Tenendo fissa l'asta OA e facendo scorrere il perno D lungo l'asta scanalata prolungamento di OA (Figura 10), il perno C si muove lungo un arco della circonferenza di centro O e raggio OC, mentre il perno B si muove lungo un arco della circonferenza di centro A e raggio AB.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

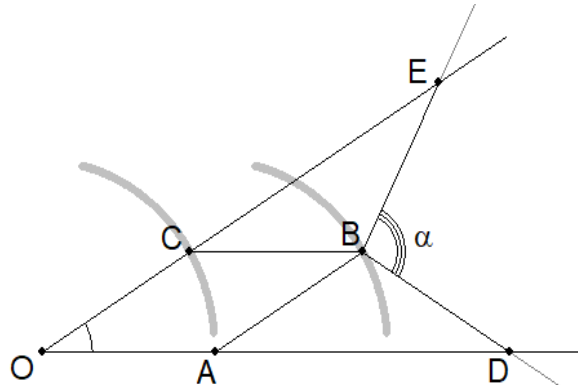


Figura 10: circonferenze individuate dai perni B e C durante il movimento del trisetettore di Ceva, tenendo ferma l'asta OA.

3. Trisetettore di Rouse Ball

Il trisetettore di Rouse Ball (1850-1925) viene introdotto da Gherzi (1951, p. 480) come un sistema articolato molto simile al trisetettore di Ceva ed è costituito da (Figura 11):

- un piano π di legno su cui è disegnato un segmento OR;
- una scanalatura, incisa sul piano π , che giace sul prolungamento del segmento OR dalla parte dell'estremo R;
- due rombi articolati, OQTR e RTSP, aventi tutti i lati congruenti. I vertici O e R sono fissati al piano, mentre il vertice S è vincolato a scorrere lungo la scanalatura.

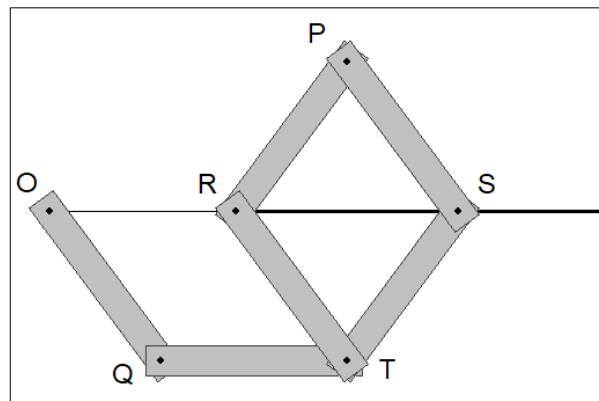


Figura 11: trisettore di Ball.

Dato un angolo α disegnato su un foglio, il trisettore di Ball va posizionato (Figura 12) in modo tale che:

Passo 1: il vertice dell'angolo α coincida con il vertice O del rombo OQTR;

Passo 2: un lato dell'angolo α passi per il vertice Q del rombo OQTR;

Passo 3: l'altro lato dell'angolo α passi per il vertice P del rombo RTSP.

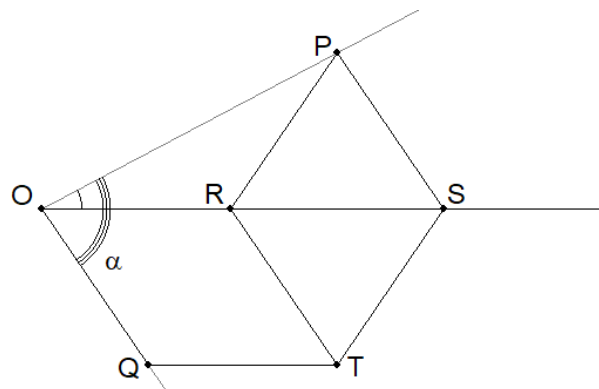


Figura 12: posizionamento del trisettore di Ball al fine di trisecare l'angolo α .

Questa macchina triseca l'angolo α e la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{ROP}$ (Figura 12).

La dimostrazione che l'angolo $\widehat{ROP}$ è pari a $\alpha/3$ fa riferimento alla Figura 13, riportata qui di seguito.

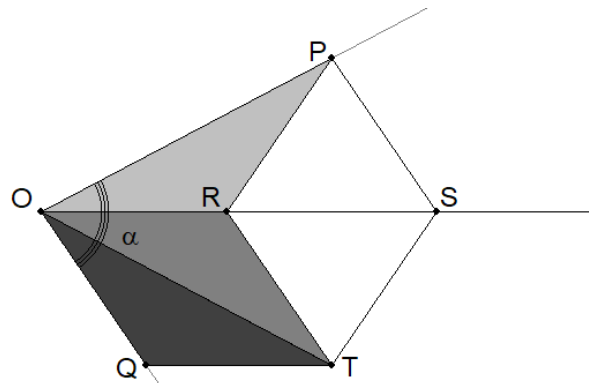


Figura 13

Si ricorda che i rombi OQTR e RTSP hanno tutti i lati congruenti.

Si considerano i seguenti triangoli isosceli:

- OQT e ORT: sono congruenti siccome OT è diagonale del rombo OQTR.
- ORT e ORP: essi hanno i lati obliqui congruenti per ipotesi e gli angoli $\widehat{ORT}$ e $\widehat{ORP}$ congruenti; allora, per il primo criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli ORT e ORP sono congruenti.

Per transitività, i triangoli isosceli OQT e ORP risultano congruenti. Allora gli angoli $\widehat{QOT}$, $\widehat{TOR}$ e $\widehat{ROP}$ sono congruenti. Sapendo che $\alpha \cong \widehat{QOT} + \widehat{TOR} + \widehat{ROP}$, si conclude che $\alpha \cong 3\widehat{ROP}$ e quindi $\widehat{ROP} \cong \alpha/3$. ■

Teoricamente il trisetettore di Ball riesce a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$. Infatti esso raggiunge il massimo angolo che riesce a trisecare quando i punti R ed S coincidono (Figura 14). In tal caso si ha che i punti P, R ($\equiv$ S) e T sono allineati e PT è perpendicolare a RO in R. Di conseguenza: il rombo OQTR è un quadrato, mentre il triangolo isoscele ORP è rettangolo in $\widehat{ORP}$ e i suoi angoli di base, $\widehat{ROP}$ e $\widehat{RPO}$, sono di 45° . Allora $\alpha \cong \widehat{QOR} + \widehat{ROP}$, la cui ampiezza risulta pari a $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

L'altra posizione limite del trisetettore, corrispondente a un angolo nullo, si ha quando il punto Q coincide con R e P con T.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

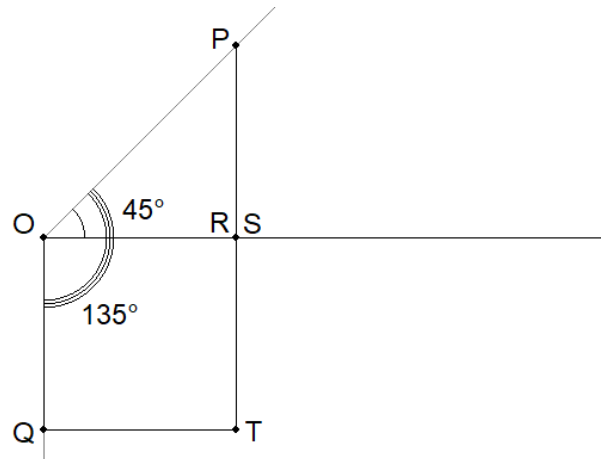


Figura 14: angolo massimo che il trisetttore di Ball riesce a trisecare.

In particolare, considerando come sono assemblate le sue componenti reali, il trisetttore di Ball presente nel Laboratorio delle macchine matematiche riesce a trisecare solo angoli α la cui ampiezza è compresa tra 21° e 130° .

Durante il movimento di questa macchina trisettrice (Figura 15), ovvero facendo scorrere il perno S lungo la scanalatura incisa sul piano di legno, i perni P e T si muovono lungo archi della circonferenza di centro R e raggio RT (avente stessa lunghezza di RP), mentre il perno Q si muove lungo un arco della circonferenza di centro O e raggio OQ.

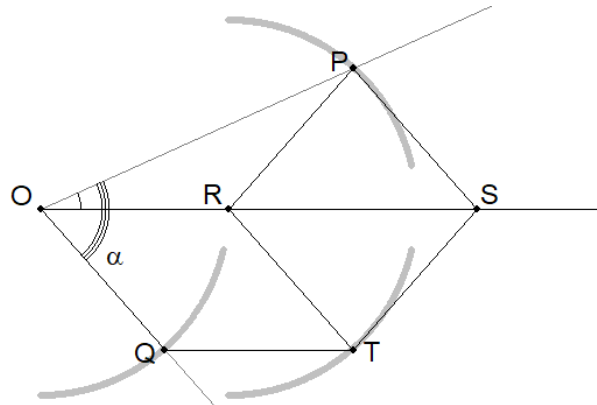


Figura 15: circonferenze individuate dai perni Q , T e P durante il movimento del trisetttore di Ball.

4. Trisetttore di Kempe

Questo trisetttore è presente in un lemma per la dimostrazione del teorema di Kempe (1876), che risolve il problema dell'identificazione dell'insieme delle curve con l'insieme delle curve prodotte da opportuni tracciatori (Bartolini Bussi e Maschietto, 2006).

Il trisetttore di Kempe (Figura 16) è costituito da tre antiparallelogrammi (o parallelogrammi incrociati) articolati ABCD, ADEF e AFGH aventi le seguenti caratteristiche:

- i lati sono proporzionali, ovvero $AB : AD = AD : AF = AF : AH$;
- le aste AB, AD, AF e AH sono incernierate nel punto A. L'asta AB è fissata su un piano di legno, mentre le altre sono libere di ruotare sul piano intorno al punto A;
- il vertice C dell'antiparallelogramma ABCD è fissato al lato DE dell'antiparallelogramma ADEF (CD e AB hanno stessa lunghezza), mentre il vertice E dell'antiparallelogramma ADEF è fissato al lato FG dell'antiparallelogramma AFGH (EF e AD hanno stessa lunghezza);
- il lato AD e l'angolo $\widehat{ADE}$ sono elementi in comune degli antiparallelogrammi ABCD e ADEF, mentre il lato AF e l'angolo $\widehat{AFG}$ sono elementi in comune degli antiparallelogrammi ADEF e AFGH.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

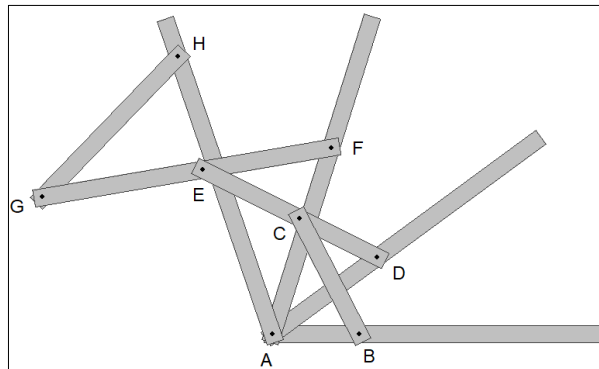


Figura 16: trisetettore di Kempe.

Dato un angolo α disegnato su un foglio, il trisetettore di Kempe va posizionato in modo tale che (Figura 17):

Passo 1: il vertice dell'angolo α coincida con il vertice A;

Passo 2: un lato dell'angolo α passi per l'estremo B dell'asta AB;

Passo 3: l'altro lato dell'angolo α passi per l'estremo H dell'asta AH.

Questa macchina triseca l'angolo α e la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{BAD}$ (Figura 17).

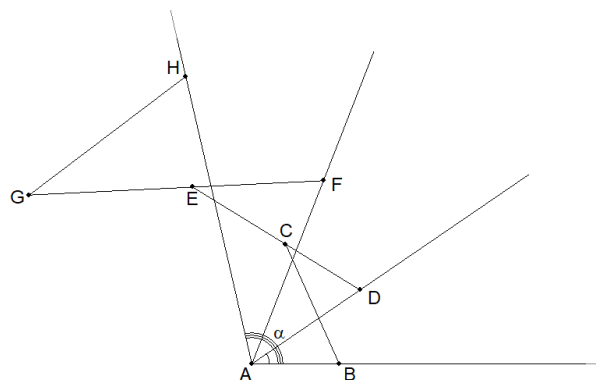


Figura 17: posizionamento del trisetettore di Kempe al fine di trisecare l'angolo α .

Nella dimostrazione che l'angolo $\widehat{BAD}$ è pari ad $\alpha/3$ si farà uso della seguente proposizione “Se due antiparallelogrammi hanno i lati in proporzione e un angolo congruente, allora sono simili”.

Per ipotesi si ha che (Figura 18):

- i lati degli antiparallelogrammi ABCD, ADEF e AFGH sono tra loro proporzionali, ovvero $AB : AD = AD : AF = AF : AH$;
- l'angolo $\widehat{ADE}$ è in comune negli antiparallelogrammi ABCD e ADEF;
- l'angolo $\widehat{AFG}$ è in comune negli antiparallelogrammi ADEF e AFGH.

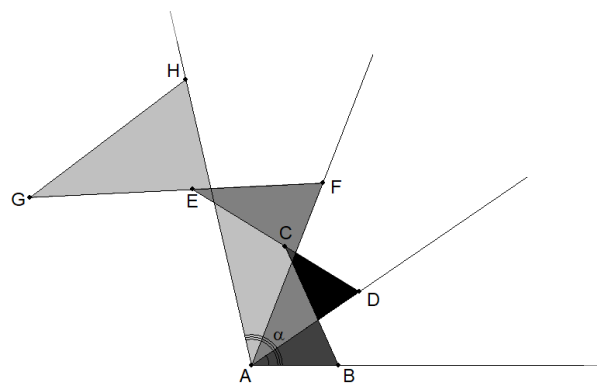


Figura 18

Consideriamo i seguenti antiparallelogrammi:

- ABCD e ADEF: essi hanno, per ipotesi, l'angolo $\widehat{ADE}$ in comune e i lati proporzionali. Allora, per la proposizione prima richiamata, ABCD e ADEF sono simili. Pertanto gli angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAF}$ sono congruenti.
- ADEF e AFGH: essi hanno, per ipotesi, l'angolo $\widehat{AFG}$ in comune e i lati proporzionali. Allora, come prima, ADEF e AFGH sono simili. Pertanto gli angoli $\widehat{DAF}$ e $\widehat{FAH}$ sono congruenti.

Allora, per transitività si ha $\widehat{BAD} \cong \widehat{FAH}$. Sapendo che $\alpha \cong \widehat{BAD} + \widehat{DAF} + \widehat{FAH}$, possiamo concludere che $\alpha \cong 3\widehat{BAD}$ e quindi $\widehat{BAD} \cong \alpha/3$. ■

Teoricamente il trisetettore di Kempe riesce a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Esso raggiunge il massimo angolo che riesce a trisecare quando l'asta AH compie un giro completo intorno ad A (Figura 19). In tal caso il punto H appartiene alla retta passante per A e B. Allora la misura dell'ampiezza di α è pari a 360° . L'altra posizione limite del trisetettore, corrispondente a un angolo nullo, si ha quando i punti H, F e D sono allineati con gli estremi dell'asta AB.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

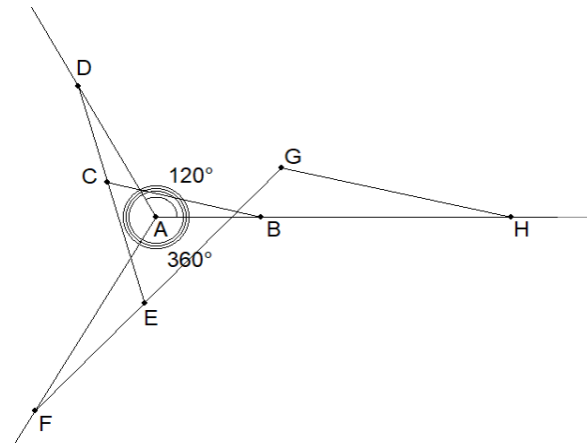


Figura 19: angolo massimo che il trisetttore di Kempe riesce a trisecare.

Il trisetttore di Kempe presenta, come gli altri trisettori, dei limiti strutturali dovuti alle dimensioni reali delle sue componenti e a come sono state assemblate; in particolare, il modello presente nel Laboratorio delle macchine matematiche riesce a trisecare solo angoli α la cui ampiezza è compresa tra 20° e 270° .

Ruotando l'asta AH intorno al perno A si mette in movimento il trisetttore di Kempe. Durante il movimento di questa macchina (Figura 20), il perno C si muove lungo un arco della circonferenza di centro B e raggio BC, mentre i perni D, F e H si muovono lungo archi di circonferenze concentriche con centro in A e raggi rispettivamente AD, AF e AH.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

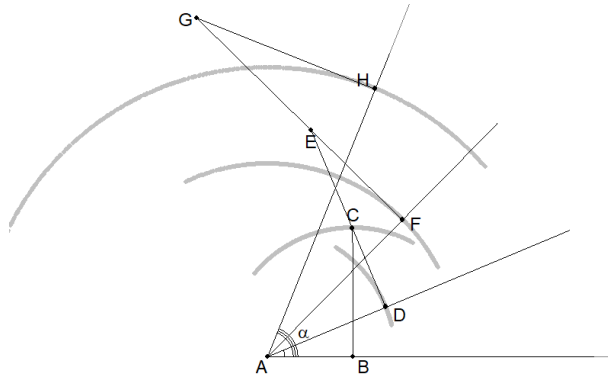


Figura 20: circonferenze individuate dai perni C, D, F e H durante il movimento del trisetttore di Kempe.

5. Trisetttore di Descartes

Dalle “Cogitationes Privatae” (Serfati, 1993) e da una lettera a Beekman (Rodis-Lewis, 1991) si apprende che nel 1619 Descartes descrive, oltre alla macchina per produrre medi proporzionali, anche un “compasso” per la suddivisione di un angolo in parti uguali.

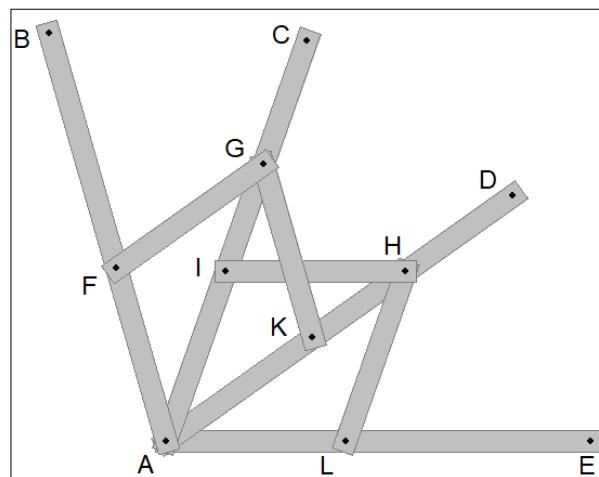


Figura 21: trisetttore di Descartes.

Il trisetto di Descartes (Figura 21) è costituito da:

- quattro aste AE, AD, AC e AB tutte incernierate nel punto A. L'asta AE è fissata su un piano di legno, mentre le altre sono libere di ruotare sul piano intorno al punto A;
- due rombi articolati, ALHI e AKGF, aventi i lati congruenti: il vertice in comune, A, è fissato al piano; i vertici L, K, I ed F sono fissati rispettivamente sulle aste AE, AD, AC e AB; il vertice H è un cursore che scivola lungo la porzione KD dell'asta AD; il vertice G è un cursore che scivola lungo la porzione IC dell'asta AC.

Dato un angolo α disegnato su un foglio, il trisetto di Descartes va posizionato (Figura 22) in modo tale che:

Passo 1: il vertice dell'angolo α coincida con A;

Passo 2: un lato dell'angolo α passi per l'estremo E dell'asta AE;

Passo 3: l'altro lato dell'angolo α passi per l'estremo B dell'asta AB.

Questa macchina triseca l'angolo α e la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{LAH}$ (Figura 22).

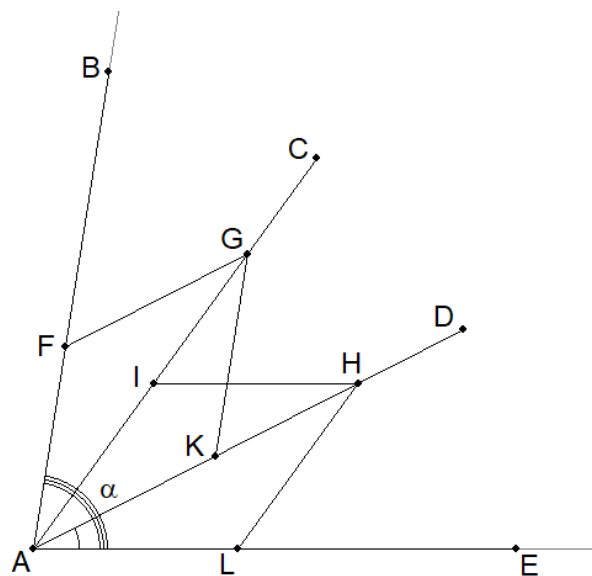


Figura 22: posizionamento del trisetto di Descartes al fine di trisecare l'angolo α .

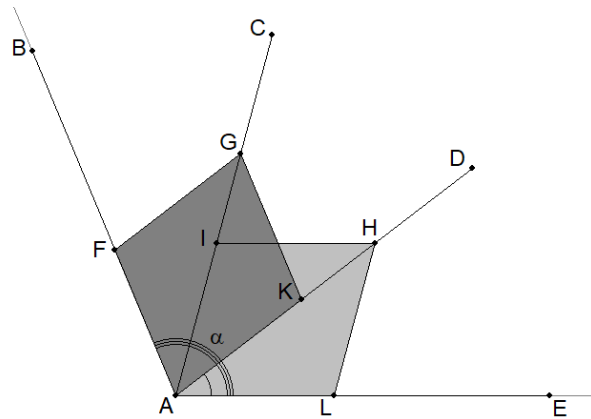


Figura 23

Di seguito è riportata una dimostrazione con riferimento alla Figura 23.

Per ipotesi si ha: $AL \cong AK \cong AI \cong AF \cong HL \cong HI \cong GK \cong GF$.

Si considerino i seguenti rombi:

- ALHI avente AH come diagonale, in cui gli angoli $\widehat{LAH}$ e $\widehat{HAG}$ sono congruenti;
- AKGF avente AG come diagonale, in cui gli angoli $\widehat{HAG}$ e $\widehat{GAF}$ sono congruenti.

Per transitività, si ha $\widehat{LAH} \cong \widehat{GAF}$.

Sapendo che $\alpha \cong \widehat{LAH} + \widehat{HAG} + \widehat{GAF}$, si conclude che $\alpha \cong 3\widehat{LAH}$ e quindi $\widehat{LAH} \cong \alpha/3$. ■

Teoricamente, il trisetttore di Descartes riesce a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Infatti esso raggiunge il massimo angolo che riesce a trisecare quando $H \equiv K$ e $G \equiv I$, ovvero le aste GK e IH si sovrappongono (Figura 24). In tal caso i triangoli ALK, AKI e AIF sono equilateri, quindi tutti i loro angoli misurano 60° . Allora risulta $\alpha \cong \widehat{LAK} + \widehat{KAI} + \widehat{IAF}$ corrispondente a una ampiezza di 180° . L'altra posizione limite del trisetttore, corrispondente a un angolo nullo, si ha quando le aste AB e AE si sovrappongono.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

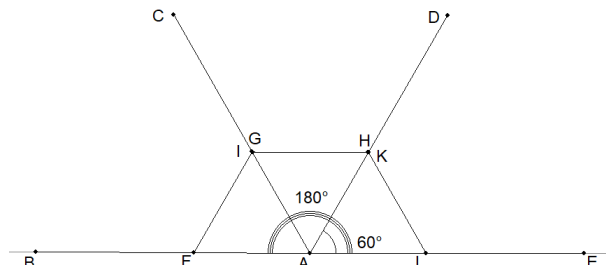


Figura 24: angolo massimo che il trisetttore di Descartes riesce a trisecare.

Il trisetttore di Descartes presenta dei limiti strutturali; in particolare il trisetttore di Descartes presente nel Laboratorio delle macchine matematiche riesce a trisecare angoli α la cui ampiezza è compresa tra 25° e 135° .

Durante il movimento di questa macchina trisettrice (Figura 25), ovvero facendo ruotare l'asta AB intorno al perno A, i perni K, I e F si muovono lungo archi della circonferenza di centro A e raggio AL (avente stessa lunghezza di AK, AI e AF), mentre il perno H si muove lungo un arco della circonferenza di centro L e raggio LH.

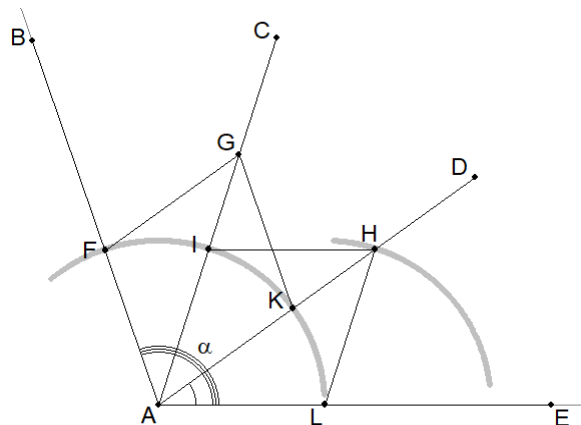


Figura 25: circonferenze individuate dai perni K, I, F e H durante il movimento del trisetttore di Descartes.

6. Trisetttore a doppia squadra

Il trisetttore a doppia squadra (Figura 26) è costituito da una lastra di plexiglas su cui sono disegnati:

- due segmenti AC e BH perpendicolari in B, dove B è un punto del segmento AC tale che $BC \cong 2AB$;
- la semicirconferenza di diametro BC.

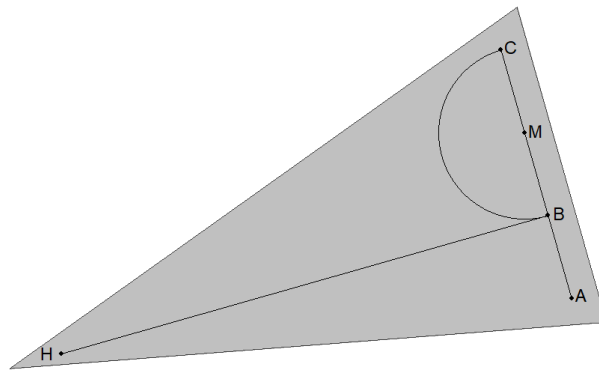


Figura 26: trisetttore a doppia squadra.

Dato un angolo α disegnato su un foglio, il trisetttore a doppia squadra va posizionato (Figura 27) in modo tale che:

Passo 1: BH passi per il vertice O dell'angolo α ;

Passo 2: il punto A appartenga ad un lato dell'angolo α ;

Passo 3: la semicirconferenza di diametro BC sia tangente all'altro lato dell'angolo α .

In alcuni casi può essere necessario prolungare i lati dell'angolo α per poter posizionare correttamente il trisetttore a doppia squadra.

Questa macchina triseca l'angolo α e la terza parte di α è individuata dall'angolo $\widehat{AOB}$ (Figura 27).

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

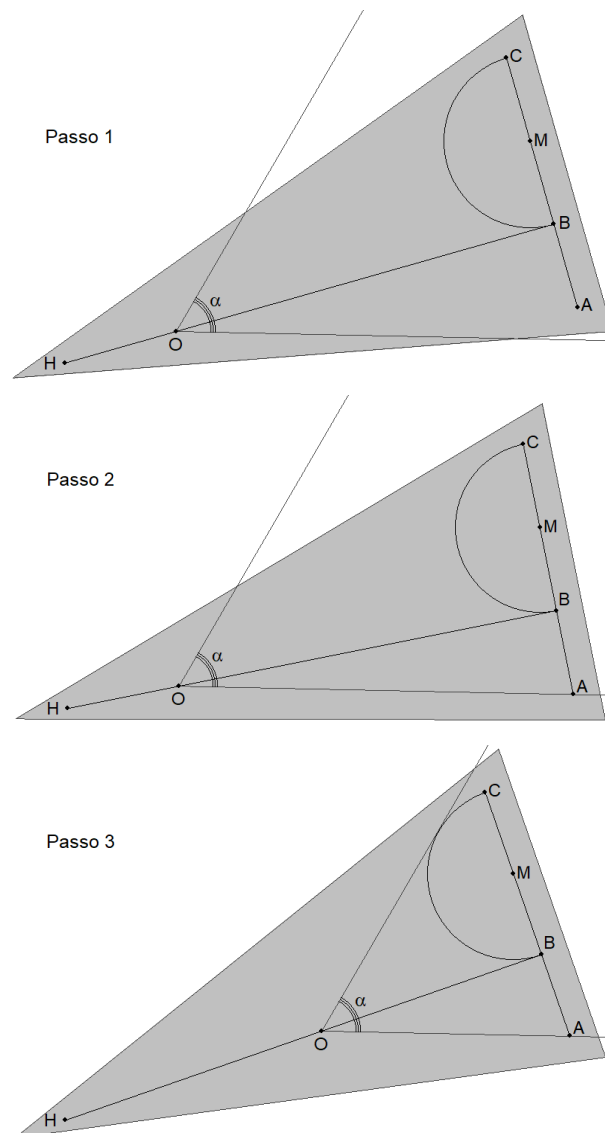


Figura 27: posizionamento del trisetttore a doppia squadra al fine di trisecare l'angolo α .

Di seguito è riportata una dimostrazione con riferimento alla Figura 28.

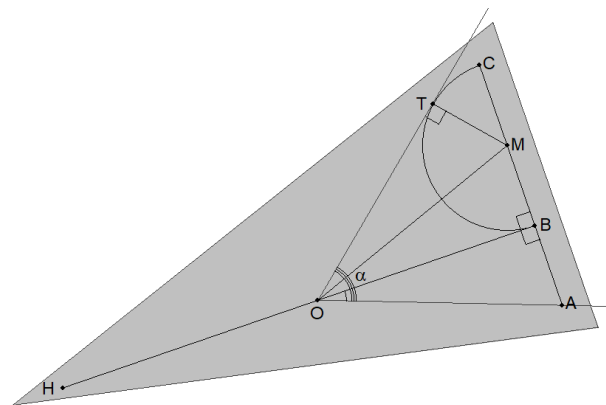


Figura 28

Per ipotesi si ha:

- $AB \cong BM \cong MC$;
- il segmento OB perpendicolare in B al segmento AC;
- T è il punto di tangenza tra il lato OT dell'angolo α e la semicirconferenza di diametro BC.

Si traccia:

- il raggio MT (perpendicolare a OT in T);
- il segmento OM.

Si considerano ora i triangoli rettangoli:

- ABO e MBO: essi sono congruenti in quanto hanno il cateto OB in comune e i cateti AB e BM congruenti per ipotesi;
- MBO e MTO: essi sono congruenti in quanto hanno l'ipotenusa OM in comune e i cateti MT e BM congruenti perché raggi di una stessa semicirconferenza.

Per transitività, anche i triangoli rettangoli ABO e MTO risultano congruenti. Ne segue che gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOM}$ e $\widehat{MOT}$ sono congruenti. Sapendo che $\alpha \cong \widehat{AOB} + \widehat{BOM} + \widehat{MOT}$, possiamo concludere che $\alpha \cong 3\widehat{AOB}$ e quindi $\widehat{AOB} \cong \alpha/3$. ■

Il trisettole a doppia squadra presenta dei limiti strutturali dovuti alle dimensioni reali della lastra di plexiglas e allo spessore del tratto con cui sono disegnate le figure sulla lastra.

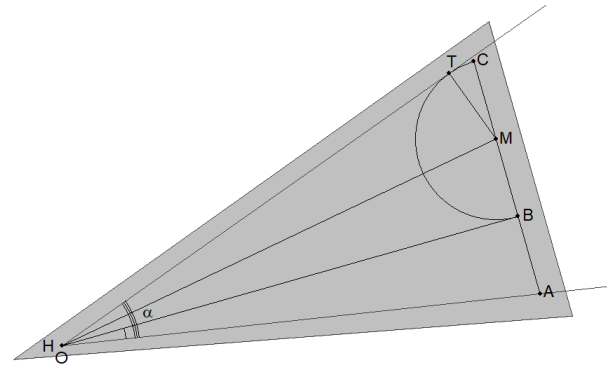


Figura 29

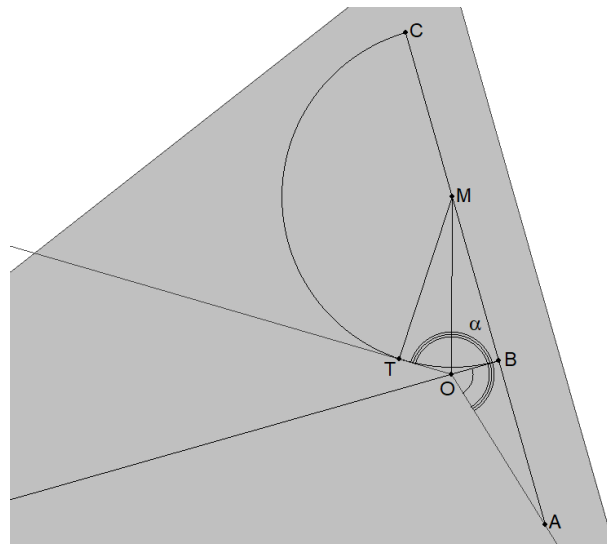


Figura 30

In generale un trisetttore a doppia squadra riesce a trisecare solo gli angoli α tali che $0^\circ < \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} < 270^\circ$, dove:

- $\alpha_{\min}$ è il minimo angolo che riesce a trisecare e dipende dalla lunghezza del segmento HB, ovvero più è lungo HB più è piccolo $\alpha_{\min}$. In particolare, $\alpha_{\min}$ corrisponde all'angolo da trisecare in cui il suo vertice O coincide con il punto H, cioè $O \equiv H$ (Figura 29);

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

- $\alpha_{\max}$ è il massimo angolo che riesce a trisecare e dipende dalla lunghezza del raggio CM della semicirconferenza; è difficile posizionare il trisettole a doppia squadra per angoli α la cui ampiezza è maggiore di 180° (Figura 30).

Teoricamente se si approssima lo spessore del tratto a zero e si considera al posto del segmento HB la semiretta di origine B e passante per H, allora il trisettole a doppia squadra riesce a trisecare tutti gli angoli α tali che $0^\circ < \alpha < 270^\circ$.

L'inventività dei matematici riguardo alla soluzione del problema della trisezione dell'angolo non è si è limitata agli strumenti descritti in questo articolo. I testi di storia della matematica ne riportano altri (Barbin, 2014). L'interesse per quelli qui presentati risiede nella possibilità di usarli in un laboratorio di matematica su questo problema classico.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M.G. e Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze. Milano: Springer.

Barbin, E. (2014). Chapitre V. Trisecter les angles. In E. Barbin (Ed.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, (pp. 117–146). Paris: Ellipse.

Conti, A. (1924/1927). Problemi di terzo grado: Duplicazione del cubo – Trisezione dell'angolo. In F. Enriques (Ed.), *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (III edizione, II parte, 325–416), Bologna: Zanichelli.

Courant, R., e Robbins, H. (2000). *Che cos'è la matematica?* Torino: Bollati Boringhieri.

Gherzi, I. (1951). *Matematica dilettevole e curiosa*. Quarta edizione. Milano: Hoepli.

Kempe, A.B. (1876). On a General Method of describing Plane Curves of the nth Degree by Linkwork. *Proc. London Math. Soc.*, 7 (102), 213–216.

Kline, M. (1996). *Storia del pensiero matematico. Volume I*. Torino: Einaudi.

Lugli, A. (2020). *Un percorso laboratoriale sulla trisezione con le macchine matematiche*. Tesi di laurea magistrale in matematica. Università di Modena e Reggio Emilia.

Lugli, A., Arabini, E., Maschietto, M. & Vangelisti, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice, rivista di matematica e didattica*, vol. XXII, n° 66, 513-538.

Pergola, M., e Zanolì, C. (1994). “Macchine matematiche”. Note su un progetto di ricerca didattica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17 (B), 689–714.

Pergola, M., e Zanolì, C. (2010). L'Associazione Macchine Matematiche. In USR E-R, ANSAS ex-IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna* (vol. 2, pp. 37–39). Napoli: Tecnodid Editrice.

Rodis-Lewis, G. (1991). Le premier registre de Descartes (II). *Archives de Philosophie*, 54 (4), 639–657.

Serfati, M. (1993). Les compas cartésiens. *Archives de Philosophie*, 56 (2), 197–230.

Anita Lugli
Elena Arabini
Michela Maschietto
Simona Vangelisti